П. В. Стратилатов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

для 9 и 10 классов средней школы

ПРОСВЕЩЕНИЕ·1965

П. В. СТРАТИЛАТОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ 9 И 10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Углы и дуги; их измерения *Стр.*

§ 1. Тригонометрические функции острого угла 3
§ 2. Углы и дуги; их измерение 8
§ 3. Координатная плоскость. Единичный круг. Расстояние между точками 11

Глава II. Тригонометрические функции

§ 4. Тригонометрические функции произвольного угла. Знаки тригонометрических функций 14
§ 5. Вычисление значений тригонометрических функций по данному значению одной из них 18
§ 6. Преобразование выражений с тригонометрическими функциями и доказательство тождеств 20
§ 7. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции 24

Глава III. Теоремы сложения и их следствия

§ 8. Формулы сложения 28
§ 9. Формулы приведения 33
§ 10. Формулы удвоения аргументов и деления аргументов пополам . . . 37
§ 11. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение 42

Глава IV. Основные свойства тригонометрических функций

§ 12. Общие свойства тригонометрических функций 46
§ 13. Графики тригонометрических функций 55
§ 14. Упражнения для повторения 57

Глава V. Решение треугольников

§ 15. Натуральные таблицы и таблицы логарифмов тригонометрических функций 61
§ 16. Решение прямоугольных треугольников 63
§ 17. Решение косоугольных треугольников 64
§ 18. Применение решения треугольников 68

Глава VI. Задачи с применением тригонометрии

§ 19. Многогранники 71
§ 20. Круглые тела 81
§ 21. Комбинации геометрических тел 84
§ 22. Тела вращения 93
§ 23. Общий отдел 94

Ответы 100

ГЛАВА I.

УГЛЫ И ДУГИ; ИХ ИЗМЕРЕНИЕ.

§ 1. Тригонометрические функции острого угла.

(*Повторение материала за VIII класс.*)

1. 1) Построить острый угол α, если

$$\sin\alpha = \frac{3}{5};\quad \cos\alpha = \frac{2}{3};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7};\quad \operatorname{ctg}\alpha = 2.$$

2) Построить острый угол α, если

$$\sin\alpha = \frac{5}{7};\quad \cos\alpha = \frac{4}{5};\quad \operatorname{tg}\alpha = 3;\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{7}.$$

2. Установить, который из углов α или β больше и почему, если каждый из них острый и известно, что

1) (устно) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\beta = \frac{2}{5}$;

2) (устно) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\beta = \frac{3}{7}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\beta = \frac{2}{3}$.

3. Установить, который из углов α или β больше и почему, если каждый из них острый и известно, что

1) (устно) $\sin\alpha = \frac{3}{7}$ и $\sin\beta = \frac{4}{7}$;

2) (устно) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\sin\beta = \frac{3}{7}$;

3) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ и $\sin\beta = \frac{3}{7}$.

4. Установить, который из углов α или β больше, если каждый из них острый и известно, что

1) (устно) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\operatorname{tg}\beta = 3$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{7}$.

5. Установить, который из углов α или β больше, если каждый из них острый и известно, что

1) (устно) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ и $\operatorname{ctg}\beta = 3$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{7}$ и $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3}$.

6. Пользуясь таблицами, найти числовые значения тригонометрических функций следующих углов.

1)	2)	3)	4)
sin 15°	sin 38°24′	sin 11°20′	sin 46°8′
tg 20°	tg 45°	tg 53°41′	tg 85°28′
cos 65°	cos 32°18′	cos 61°10′	cos 11°40′
ctg 65°	ctg 37°36′	ctg 19°39′	ctg 9°40′

7. Пользуясь таблицами, найти острый угол α по данным значениям тригонометрических функций.

1)	2)	3)	4)
$\sin\alpha = 0{,}3420$;	$\sin\alpha = 0{,}4948$;	$\sin\alpha = 0{,}842$;	$\sin\alpha = 0{,}9293$;
$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4452$;	$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}42$;	$\operatorname{tg}\alpha = 2{,}558$;	$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}63$;
$\cos\alpha = 0{,}8910$;	$\cos\alpha = 0{,}4456$;	$\cos\alpha = 0{,}2341$;	$\cos\alpha = 0{,}0135$;
$\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}6946$;	$\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}4948$;	$\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}4142$;	$\operatorname{ctg}\alpha = 3{,}115$.

8. Вычислить площадь ромба по его стороне $a = 7{,}5$ *см* и острому углу $\alpha = 22°12'$.

9. Диагонали ромба $d_1 = 28$ *см* и $d_2 = 49$ *см*; вычислить углы ромба.

10. По основанию $b = 28{,}13$ *м* и боковой стороне $a = 17{,}53$ *м* равнобедренного треугольника вычислить угол при основании.

11. По основанию $b = 31{,}26$ *м* и высоте $h = 20{,}75$ *м* равнобедренного треугольника вычислить угол при его вершине.

12. Основания трапеции a и b, одна из боковых сторон c, острый угол, прилежащий к ней, α. Определить площадь трапеции.

13. В круге радиуса $R = 4{,}175$ *м* вычислить длину хорды, стягивающей дугу $\alpha = 37°42'$.

14. Смежные стороны прямоугольника $a = 75{,}2$ *см* и $b = 63{,}6$ *см*; вычислить, на какие части делит диагональ прямоугольника угол при его вершине.

15. Смежные стороны прямоугольника $a = 13{,}5$ *см* и $b = 7{,}4$ *см*. Вычислить угол между его диагоналями.

16. В круге радиуса $R = 35{,}8$ *см* проведена хорда длиной $a = 28{,}7$ *см*. Найти число градусов и минут в меньшей дуге, стягиваемой этой хордой, и расстояние хорды от центра круга.

17. Хорда равна $\frac{3}{4}$ диаметра круга. Определить число градусов и минут в меньшей дуге, которая стягивается этой хордой.

18. Угол α, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой a. Определить радиус круга.

19. Дан круг радиуса $R = 3{,}35$ *см*. Из точки, отстоящей от центра на $a = 8{,}32$ *см* ($a > R$), проведены две касательные. Вычислить угол между касательными.

20. Линия центров двух кругов, один из которых расположен вне другого, равна $d = 6{,}245$ *м*, а радиусы их равны $R = 3{,}065$ *м* и $r = 1{,}007$ *м*. Определить углы, под которыми общие внутренняя и внешняя касательные этих кругов пересекают линию их центров.

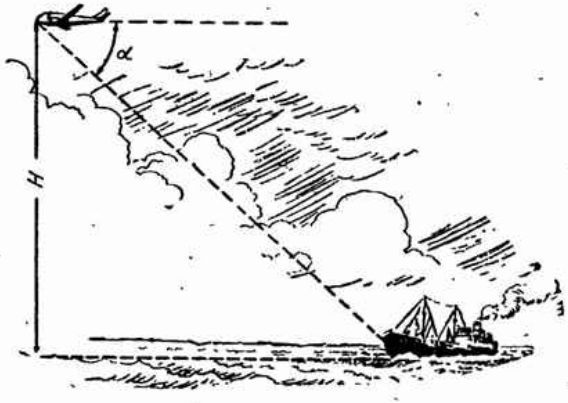
21. Боковая сторона равнобедренного треугольника a, угол при вершине β. Определить радиусы описанной (R) и вписанной (r) в этот треугольник окружностей.

22. Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, катет которого равен a, а прилежащий к нему острый угол равен β.

23. С маяка, высота которого над уровнем моря $H \approx 150$ *м*, определяют расстояние до проходящего мимо парохода. Угол понижения $\alpha \approx 9°$ (черт. 1). Вычислить искомое расстояние.

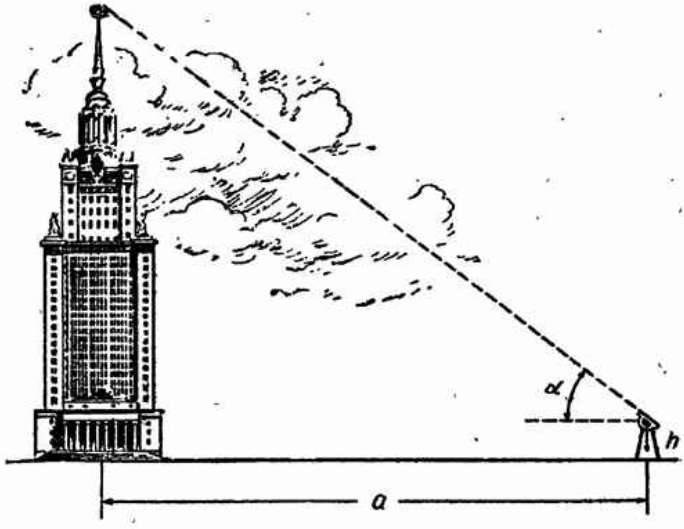
Черт. 1

24. Самолёт радирует капитану рыболовецкого судна, что он находится над косяком рыбы на высоте $H \approx 950$ *м*. С судна определяют угол $\alpha \approx 26°30'$ возвышения самолёта. Вычислить расстояние судна от косяка рыбы (черт. 2).



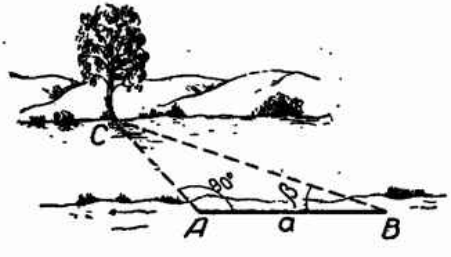
Черт. 2

25. Чтобы измерить высоту башни главного входа здания Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, измерили угломерным инструментом угол возвышения α (черт. 3). Расстояние угломера от главного входа равно a. Вычислить приближённое значение определяемой высоты, если высота угломерного инструмента h ($\alpha \approx 53°$; $a \approx 180$ *м*; $h \approx 1{,}2$ *м*).



Черт. 3

26. Штурман на карте прокладывает курс корабля и при прохождении мимо маяка измеряет угол возвышения α. Вычислить отрезок, который на карте отложит штурман от точки, изображающей маяк, для установления местонахождения корабля. Высота маяка H, масштаб карты $\frac{1}{100\,000}$ ($\alpha \approx 2°50'$; $H \approx 150$ *м*).



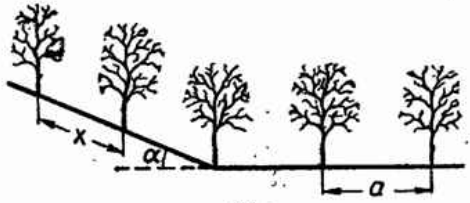
Черт. 4

27. Чтобы определить ширину реки, проводят на одном берегу, непосредственно у воды, базис AB, равный a (черт. 4); из конца A базиса, по перпендикулярному к нему направлению, на противоположном берегу у самой воды видно дерево C; из другого же конца B базиса это дерево видно под углом β к базису. Вычислить ширину реки, если $a \approx 45$ *м* и $\beta \approx 25°$.

28. Горная железная дорога поднимается на $\frac{1}{2}$ *м* на каждые 30 *м* пути. Найти угол подъёма.

29. Если на горизонтальной поверхности земли предполагается рассаживать деревья на расстоянии a одно от другого, то на каком расстоянии одну от другой соответственно с этим следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма (черт. 5), имеющему наклон α к горизонту?

30. В полдень при угловой высоте α солнца над горизонтом фабричная труба бросает тень длиной a. Вычислить высоту трубы, если $\alpha \approx 28°$ и $a \approx 76$ *м*.



Черт. 5

31. Насыпь имеет сверху ширину a, а снизу b. Боковые стороны насыпи наклонены к горизонту под углом α. Вычислить высоту насыпи, если $a \approx 10{,}0$ *м*, $b = 24{,}0$ *м* и $\alpha \approx 25°$.

32. Поперечный разрез насыпи, при постройке которой был применён наибольший возможный откос φ, представляет равнобедренную трапецию. Нижнее основание трапеции a, высота h. Вычислить верхнее основание трапеции, если $a \approx 10{,}0$ *м*, $h \approx 3{,}0$ *м* и $\varphi \approx 39°$.

33. Две точки выходят одновременно из вершины прямого угла и движутся равномерно первая по одной, а вторая по другой стороне этого угла; первая проходит по a метров, а вторая по b метров в секунду. Под каким углом φ к направлению движения первой точки видна из неё вторая точка?

34. На прямой MN взята точка A, и из неё под острым углом α к прямой MN проведён отрезок AB длиной a. Определить проекцию отрезка AB на прямую MN. Как изменяется величина этой проекции при увеличении угла α от 0 до 90°?

35. Две силы $P \approx 4{,}3$ *кГ* и $Q \approx 5{,}6$ *кГ* направлены перпендикулярно друг к другу. Найти равнодействующую этих сил и угол, который она образует с направлением силы P.

36. Принимая Землю за шар с приближённым значением диаметра, равным 12 740 *км*, по широте места φ определить длину окружности параллели, соответствующей этому месту. Вычислить для г. Москвы при $\varphi \approx 56°$.

37. Вагонетка весом P движется по рельсам в гору под углом α. Какую наименьшую силу нужно приложить, чтобы удержать вагонетку на месте, если $P \approx 0{,}7$ *т* и $\alpha \approx 12°40'$.

38. Доказать, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Указание. Одну из двух данных сторон принять за основание треугольника.

39. Доказать, что площадь параллелограмма выражается формулой $s = ab \sin\alpha$, где a и b — смежные стороны параллелограмма

и α — острый угол между ними. Какой вид примет эта формула для ромба?

40. 1) По данному радиусу R круга определить сторону правильного вписанного n-угольника.

2) По данному радиусу R круга определить сторону правильного описанного n-угольника.

3) По данной стороне a_n правильного многоугольника определить его апофему.

41. Определить наибольшую диагональ правильного n-угольника, сторона которого a_n.

Указание. Рассмотреть 2 случая: n чётное и нечётное.

§ 2. Углы и дуги; их измерение.

42. Вычислить в градусах угол, описываемый часовой стрелкой в течение:

1) 1 часа; 2) $2\frac{1}{2}$ часов; 3) 4 часов;

4) 3 часов; 5) 12 часов; 6) 24 часов.

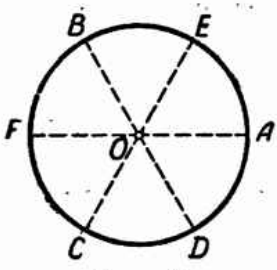
43. Вычислить в градусах угол, описываемый минутной стрелкой часов в течение промежутков времени, данных в задаче 42.

44. Колесо машины в 2 секунды делает 6 оборотов. Выразить в градусах угол, на который повернётся колесо за 1 секунду; за 10 секунд.

45. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. Выразить в градусах угол, на который повернётся колесо при обороте на 1 зубец; 30 зубцов; 144 зубца; 300 зубцов.

46. Стрелка силомера перемещается на два деления при действии на него силой в 1 *кГ*. Выразить в градусах угол, на который повернётся стрелка силомера при действии на него силой: 1) в 80 *кГ*; 2) в 56 *кГ*.

Указание. На циферблате ручного силомера имеется 180 делений; дуга силомера составляет полуокружность.



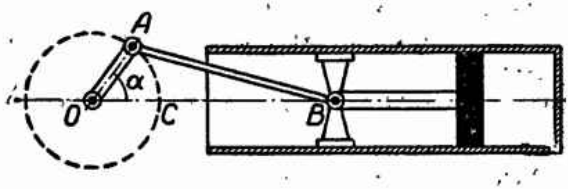
Черт. 6

47. Стрелка шагомера обходит циферблат, когда сделано 1000 шагов. Выразить в градусах угол, на который повернётся стрелка шагомера, если сделано: 1 шаг; 10 шагов; 150 шагов; 1250 шагов; 1500 шагов.

48. Окружность разделена на шесть равных частей: $\smile AE = \smile EB = \smile BF = \smile FC = \smile CD = \smile DA$. Написать общий вид углов, если конечные стороны их занимают положение: 1) OB; 2) OC (черт. 6) и если начальные стороны углов совпадают с OA.

49. Начертить положение конечной стороны угла, равного: 45°; (—30°); 225°; (—135°); (—90°); 450°; (—810°); 2070°. Для каких данных углов конечные стороны их совпадают?

50. Кривошип OA паровой машины повернулся на угол COA (черт. 7). В то же время её шатун AB повернулся на угол CBA. Известно, что $AB > OA$. Какой из этих углов больше по абсолютной величине и почему? Что можно сказать о знаках этих углов, если отсчёт вращения производится от радиуса OC?



Черт. 7

51. 1. Найти радианную меру углов:

30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 75°; 108°; 210°; 225°; 240°; 300°; 315°; 330°; 1°; α; 76°30′; 7200°.

2. Найти радианную меру следующих углов:

7°24′; 18°34′; 23°11′; 44°53′; 45°; 67°33′; 71°43′; 83°58′.

52. Найти приближённо градусную меру углов, радианная мера которых равна:

$$1{,}5;\ 0{,}75;\ \frac{2}{3}\pi;\ \frac{3}{5}\pi;\ 1\frac{1}{4}\pi.$$

53. В какой четверти расположена конечная сторона центрального угла α, если его радианная мера выражена числами:

1; 1,8; 3,14; 2,3; 4,01; 6; 23; 0,6981.

54. При помощи транспортира по географической карте определить азимут* направления:

1) Москва — Ленинград; 2) Москва — Горький;
3) Москва — Саратов; 4) Москва — Киев.

Найденные значения углов выразить в радианной мере.

55. Найти в радианной мере дополнение до прямого угла следующих острых углов:

$$\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{12};\ \frac{7\pi}{20};\ 0{,}6;\ 0{,}7321.$$

56. Для данных в радианной мере углов найти их смежные углы (в градусной мере);

$$\frac{2}{5}\pi;\ \frac{11\pi}{20};\ \frac{7\pi}{9}.$$

---

* Азимутом называется угол между географическим меридианом места и данным направлением. Азимут в геодезии отсчитывается от точки севера в направлении движения часовой стрелки от 0 до 360°.

57. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $\frac{\pi}{9}$. Определить угол при основании.

58. Радианная мера двух углов треугольника соответственно равна $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{3}\pi$. Найти в градусах величину каждого из углов треугольника.

59. Углы треугольника относятся, как 3 : 4 : 5. Определить радианную меру этих углов.

60. Два угла треугольника соответственно равны 30° и 45°. Определить радианную меру каждого угла этого треугольника.

61. Определить по таблицам радианную меру углов четырёхугольника, если значения их относятся, как 4 : 7 : 11 : 14.

62. Вычислить величину вписанного угла, если радианная мера дуги, на которую он опирается, равна $\frac{7\pi}{18}$.

63. Величина дуги окружности в радианной мере равна $\frac{2\pi}{9}$. Под каким углом из точек этой дуги видна стягивающая её хорда?

64. В конце хорды, длина которой равна радиусу, проведена касательная к окружности. Определить в радианной мере величину угла между касательной и хордой.

65. Радиус круга равен 5 *см*. Вычислить длину дуги окружности этого круга, содержащей 18°.

66. Радиус окружности равен 20 *см*. Определить длину дуги этой окружности, если она содержит:

$$30^\circ;\ 11^\circ 25';\ 40^\circ 20';\ 73^\circ 45'.$$

67. Колесо, радиус которого равен 1,2 *м*, делает в минуту 300 оборотов.

1) Найти его угловую скорость ω. (Угловая скорость имеет наименование $\frac{\text{радиан}}{\text{секунда}}$.)

2) Найти линейную скорость той точки колеса, которая отстоит от центра на 20 *см*.

3) Найти линейную скорость точки, находящейся на окружности колеса.

4) Доказать, что линейная скорость вращения точки, отстоящей от центра на расстоянии r, равна $r\omega$.

68. Угловая скорость вала равна 21 радиану в секунду. Определить число его оборотов в минуту.

69. Выразить угловую скорость вращения Земли в следующих единицах:

$$\frac{\text{радиан}}{\text{час}};\ \frac{\text{радиан}}{\text{минута}};\ \frac{\text{радиан}}{\text{секунда}}.$$

70. Колесо вращается с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{9}$ радиан в секунду. Во сколько секунд оно сделает полный оборот?

71. Определить угловую скорость вращения: 1) часовой стрелки; 2) минутной стрелки.

72. Два зубчатых колеса, одно из которых ведущее, имеет 20 зубцов, а ведомое 30 зубцов, сцеплены так, что вращаются в разные стороны.

На какой угол повернётся ведомое колесо, если ведущее повернулось на 8 зубцов? Изменится ли и как угол поворота ведомого колеса с увеличением числа зубцов ведущего колеса?

73. Найти радианную меру внутренних углов следующих правильных многоугольников: треугольника, шестиугольника, пятиугольника, десятиугольника и четырёхугольника.

74. Радиус круга 10 *см*. Найти периметр сектора, дуга которого содержит 0,7 радиана.

75. Построить угол $(-\alpha)$, если угол α имеет следующее значение:

$$10^\circ;\ 180^\circ;\ \frac{\pi}{2};\ (-30^\circ);\ \left(-\frac{\pi}{2}\right);\ (-\pi);\ 270^\circ;\ \left(-\frac{3}{2}\pi\right);\ 1.$$

76. Конечная сторона угла образует с осью OX угол α. Написать общую формулу для углов, конечная сторона которых занимает такое же положение. Применить составленную формулу для значений:

$$\alpha = 30^\circ;\ \alpha = -60^\circ;\ \alpha = -\frac{\pi}{4};\ \alpha = \pi;\ \alpha = 1{,}2.$$

§ 3. Координатная плоскость. Единичный круг. Расстояние между точками.

77. Построить точки на плоскости по их координатам:

M_1 (3; 5); M_2 (—3; 8); M_3 (—4; —10); M_4 (7; —2).

78. Построить точки M_1 (2; 4) и M_2 (6; 10) и вычислить абсциссу и ординату середины отрезка M_1M_2.

79. Вычислить координаты середины отрезка, соединяющего точки:

1) M_1 (3; 8) и M_2 (6; 11); 2) M_1 (—4; 2) и M_2 (2; —3).

80. 1) На единичной окружности построить точку, соответствующую дуге α, если

$$\alpha = \frac{\pi}{4};\ \alpha = 1{,}2;\ \alpha = \pi.$$

2) На единичной окружности отметить дуги α, удовлетворяющие условиям:

а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;

в) $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{3}{2}\pi < \alpha < 0$.

3) На единичной окружности отметить дуги α, удовлетворяющие условию:

а) $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$; б) $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$; в) $|\alpha| \leqslant \pi$.

81. Вычислить расстояние данной точки от начала координат:

M (5; 7); M (—7; —8); M (—3; 5);
M (X_1; Y_1), где X_1 и Y_1 — любые действительные числа.

82. Вычислить с точностью до 0,1 расстояние между точками, применяя в каждом случае теорему Пифагора и формулу из учебника:

1) M_1 (2; 5) и M_2 (3; 8). 3) M_1 (—7; —10) и M_2 (0; 0).
2) M_1 (—3; 2) и M_2 (—4; 6). 4) M_1 (—4; —7) и M_2 (—5; —2).

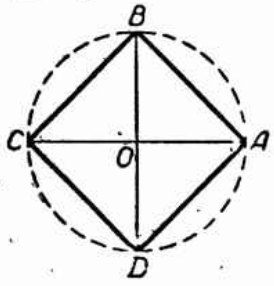
83. 1) Построить точку, симметричную точке M (2; 5), относительно начала координат. Каковы координаты этой точки?

2) То же для точки M (—2; —5).
3) То же для точки M (4; —3).

84. 1) Найти координаты точки, симметричной точке M_1 (—3; 4), относительно начала координат. Каково расстояние искомой точки от начала координат?

2) То же для точки M_1 (6; —9).
3) То же для точки M_1 (X_1; Y_1), где X_1 и Y_1 — любые действительные числа.

85. 1) Одна из вершин квадрата, вписанного в единичный круг, расположена в точке A (1; 0) (черт. 8). Указать координаты остальных вершин квадрата и написать общие формулы углов, которые составляют лучи, проведённые в эти вершины, с осью OX.



Черт. 8

2) То же для правильного треугольника.
3) То же для правильного шестиугольника.

86. Точка A движется от начала координат прямолинейно и равномерно под углом $\alpha = 48°$ к оси OX со скоростью $v \approx 5{,}0 \frac{см}{сек}$. Найти координаты точки через $t = 8$ сек. после начала движения.

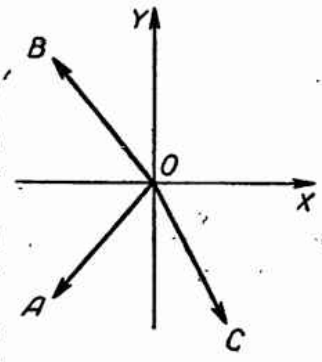
87. Точка M с координатами $X \approx 3{,}0$; $Y \approx 5{,}0$ переместилась прямолинейным движением в точку M_1 с координатами $X_1 \approx 5{,}0$ и $Y_1 \approx 10{,}0$. Под каким углом к оси OX двигалась точка и какое расстояние она прошла?

88. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках: M_1 (—2; —3); M_2 (—3; 4); M_3 (3; 5).

89. 1) На чертеже 9 дан вектор OA, отнесённый к системе координат XOY. Построить проекции вектора OA на оси OX и OY и измерить транспортиром по чертежу углы, составленные вектором OA с его проекциями.

2) То же для вектора OB.

3) То же для вектора OC.



Черт. 9

90. 1) Вектор OA имеет длину 10 *см* и направлен под углом 38° к оси OX. Вычислить приближённо с точностью до 0,1 проекции вектора OA на оси координат.

2) То же для вектора OB, длина которого равна 7,2 *см*, если OB составляет с осью OX угол 76°.

91. 1) Вектор AB, направленный по оси абсцисс вправо, повернулся вокруг начальной точки на угол $\alpha = 220°$ против движения стрелки часов. Построить начальное и конечное положения вектора AB, а также вычислить приближённо с точностью до 0,1 проекции его на оси координат, если $|AB| = 1$.

2) То же для вектора CD, если $\alpha = 835°$ и $|CD| = 1$.

92. 1) A и B — две точки окружности, причём меньшая дуга AB равна 90°. Обе точки начинают одновременно двигаться в одном направлении; точка A проходит каждую минуту дугу в 30°; точка B — дугу 45°. Через сколько минут после начала движения точки совпадут?

2) То же для случая, когда точки A и B являются концами одного и того же диаметра окружности, причём точка A проходит каждую минуту дугу в 45°, а точка B — дугу в 60°.

93. Построить вектор и вычислить его длину с точностью до 0,1, если:

1) проекция вектора на ось OX равна (—3), а проекция вектора на ось OY равна 5;

2) проекция вектора на ось OY равна нулю, а проекция на ось OX равна (—4).

94. 1) Построить углы $(\alpha \pm \beta)$, если а) $\alpha = 30°$; $\beta = 120°$; б) $\alpha = -20°$; $\beta = 60°$; в) $\alpha = 470°$; $\beta = 10°$.

2) Начертить оси координат, взять произвольно точку на плоскости и найти её абсциссу и ординату. Поверните оси координат на $\angle\alpha$. Найти абсциссу и ординату той же точки в новой системе координат.

Решить задачу:

а) для точки 1-й четверти и $\alpha = 30°$;

б) » » 2-й » и $\alpha = 225°$;

в) » » 3-й » и $\alpha = 120°$.

ГЛАВА II.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§ 4. Тригонометрические функции произвольного угла. Знаки тригонометрических функций.

95. Построить радиус-вектор, длина которого l и который составляет угол α с осью OX. Построить проекции этого вектора на оси OX и OY и установить знаки $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Решить задачу при 1) $l = 3$ *см*, $\alpha = 140°$, 2) $l = 2$ *см*, $\alpha = 230°$, 3) $l = 2{,}5$ *см*, $\alpha = 325°$.

96. Заполните таблицу, показав знаками «+» и «—» знаки тригонометрических функций углов, оканчивающихся в различных координатных четвертях.

Четверть / Название функции	I	II	III	IV
Косинус				
Синус				
Тангенс				
Котангенс				

Дать обоснование ответа.

97. Какие знаки имеют:

(Устно.) 1) $\sin 110°$; $\cos 280°$; $\operatorname{tg} 250°$; $\operatorname{ctg} 100°$; $\sin 200°$; $\operatorname{tg} 100°$;

2) $\sin\frac{3}{4}\pi$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{ctg}\frac{4}{5}\pi$; $\cos\frac{2\pi}{3}$; $\sin 4$; $\cos(-1{,}5)$; $\operatorname{tg}(-0{,}3)$;

3) $\sin 100° \cdot \sin 95°$; $\cos 200° \cdot \cos 170°$; $\operatorname{tg} 95° \cdot \operatorname{tg} 125°$; $\operatorname{ctg} 310° \cdot \operatorname{ctg} 240°$;

4) $\sin 150° \cdot \cos 150° \cdot \operatorname{tg} 150° \cdot \operatorname{ctg} 150°$; $\sin 250° \cdot \cos 250° \cdot \operatorname{tg} 250°$; $\sin 300° \cdot \cos 300° \cdot \operatorname{ctg} 300°$; $\sin 70° \cdot \cos 140° \cdot \operatorname{tg} 280°$.

98. В каких четвертях имеют одинаковые знаки:

1) синус и косинус; 2) тангенс и котангенс; 3) синус и тангенс; 4) косинус и котангенс.

99. (Устно.) 1) Определить знаки тригонометрических функций, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \operatorname{tg}(\pi+\alpha);\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \sin(2\pi-\alpha);\ \cos(\pi-\alpha).$$

Какие знаки имеют выражения $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; $\sin^2\alpha$; $\cos^2\alpha$ при любом допустимом значении аргумента α?

100. В какой части промежутка $(0; 2\pi)$ выражение
1) $\sin x \cdot \cos x$ положительно? 2) $\operatorname{tg} x \cdot \sin x$ отрицательно?
3) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$ положительно? 4) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ отрицательно? 5) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x$ отрицательно? 6) $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x$ отрицательно?

101. Какие знаки имеют выражения $\cos^2 x$ и $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ при любом x?

102. Если α, β и γ — углы треугольника, то:
1) Какой знак имеет сумма $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$?
2) Какие тригонометрические функции углов α, β и γ могут быть отрицательными и при каком условии?
3) Определить знаки выражений:

а) $\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

103. 1) Радиус-вектор имеет длину l и составляет угол α с осью OX, причём $\cos\alpha = m$. Чему равны проекции этого радиуса на оси OX и OY?
2) Радиус-вектор имеет длину l и составляет угол α с осью OX, причём $\sin\alpha = n$. Чему равны проекции этого радиуса на оси OX и OY?

104. (Устно.) Найти значения следующих выражений:
1) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$;
2) $3\operatorname{tg} 0^\circ + 2\cos 90^\circ + 3\sin 270^\circ - 3\cos 180^\circ$;
3) $4\sin\pi - 2\cos\dfrac{3}{2}\pi + 3\sin 2\pi - \operatorname{tg}\pi$;
4) $6 - 2\sin 2\pi - 3\cos\pi + 2\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;
5) $2\sin\dfrac{\pi}{4} + 3\cos 2\pi - 5\operatorname{tg} 2\pi$;
6) $4\operatorname{tg} 2\pi - 2\sin\dfrac{\pi}{2} + 3\cos\dfrac{3}{2}\pi - 4\operatorname{tg}\pi$.

105. 1) Доказать, что при радиусе $R = 1$ всякая хорда окружности равна удвоенному синусу половины центрального угла, соответствующего хорде.
2) Составим следующую таблицу:

выпишем три первых натуральных числа	1	2	3
извлечем из каждого квадратный корень	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
разделим полученные числа на два	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Значения синусов каких углов получены в 3-й строке? Как использовать полученные числа для нахождения значений $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$ и $\cos 60^\circ$?

106. Зная значения тригонометрических функций для $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, вычислить значения тригонометрических функций для значений аргумента:

1) $\frac{2}{3}\pi\,(120°)$; $1\frac{1}{3}\pi\,(240°)$; $1\frac{2}{3}\pi\,(300°)$;

2) $\frac{3}{4}\pi\,(135°)$; $1\frac{1}{4}\pi\,(225°)$; $1\frac{3}{4}\pi\,(315°)$;

3) $\frac{5}{6}\pi\,(150°)$; $1\frac{1}{6}\pi\,(210°)$; $1\frac{5}{6}\pi\,(330°)$.

Указание. В единичном круге построить 4 вектора, составляющих с осью OX соответственно углы 60°; 120°; 240° и 300°; зная sin 60° и cos 60°, вычислить синусы и косинусы остальных углов.

Составить такую таблицу:

	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Косинус																
Синус																
Тангенс																
Котангенс																

107. Вычислить:

1) (устно) $\sin 0° + 2\cos 60° - 3\operatorname{tg} 45°$;

2) (устно) $2\sin 30° - \operatorname{tg} 45° + 2\operatorname{ctg} 45° + \cos 90°$;

3) $3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

4) $3 - \sin^2\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

5) $\frac{4 - 2\operatorname{tg}^2 45° + \operatorname{ctg}^4 60°}{3\sin^3 90° - 4\cos^2 60° + 4\operatorname{ctg} 45°}$;

6) $\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^4 - \left(2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2$;

7) $3\sin^2\frac{\pi}{2} - \left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^3 - 4\cos^2\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{2}$.

108. Упростить выражения:

1) (устно) $a\sin 0° + b\cos 90° + c\operatorname{tg} 0° - b\operatorname{ctg} 90°$;

2) $a\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2b\sin\frac{\pi}{4} - 3a\operatorname{tg} 0 - 2a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $4a\sin^2\frac{\pi}{4} - 3\left(a\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(2a\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$;

4) (устно) $a^2\sin 90° + 2ab\operatorname{tg} 45° + b^2\cos 0°$;

5) $4a^2 \sin^4 \frac{\pi}{4} - 6ab \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + b \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\Big)^2$;

6) $\dfrac{\left(a \sin \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(b \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2 \sin \frac{\pi}{6} - 2ab \cos 0 + \left(b \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)^2}$;

7) $\dfrac{\left(2a \cos \frac{\pi}{3}\right)^3 - \left(b \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\right)^3 + (3ab \sin 0)^2}{\left(5a \cos \frac{\pi}{2}\right)^3 + 2a \sin \frac{\pi}{6} - 2b \cos^2 \frac{\pi}{4}}$.

109. Найти значение следующих выражений:

1) (устно) $\sin\alpha + \cos\alpha$ при значениях угла α; 0°; 45° и 90°;

2) $\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$ при значениях угла α; 0°, 30° и 60°;

3) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\sin 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 4\cos\alpha - 2\operatorname{ctg} 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

5) $2\sin(45° + \alpha) + 3\cos(180° - 2\alpha) - 4\operatorname{ctg}(90° - \alpha)$ при $\alpha = 45°$;

6) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(15° + \alpha) - \sin\alpha}$ при $\alpha = 30°$;

7) $\dfrac{2\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$ при $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Чётность и нечётность тригонометрических функций.

110. Среди функций $\cos x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin x$; $\sin^2 x$; $\sin^3 x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{tg}^3 x$; $-\sin x$; $-\cos x$; $-\operatorname{tg} x$; $-\operatorname{ctg} x$; $\dfrac{x}{\sin x}$; $\dfrac{\cos x}{x}$; $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x}$ выделить чётные и нечётные.

111. Найти значения тригонометрических функций углов:

1) (устно) (—30°); (— 45°); (— 60°); (— 90°);

2) (устно) (— 135°); (— 210°); (— 300°); (— 180°).

(Использовать таблицу упражнения 106.)

112. Упростить выражения:

1) $a \sin(-30°) - 2a \operatorname{tg}(-45°) + b \cos(-60°) - b \operatorname{ctg}(-90°)$;

2) $\dfrac{\sin^3(-30°) - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 1}{2 - \operatorname{tg} 45° + 4\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

3) $\left[2a \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 - 4\left[a \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^3 + 6 \operatorname{tg} 0$;

4) $5 \operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

113. Найти значения следующих выражений:

1) $4\cos(3\alpha - 30°) + 2\operatorname{tg}^2 2\alpha - 2\sin(30° + \alpha)$ при $\alpha = 30°$;

2) $\sin\beta + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$ при $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ и $\beta = -\frac{\pi}{4}$.

114. Определить значения следующих выражений:

1) $2\sin 120° \cdot \operatorname{tg} 300°$; 2) $6\cos(-240°) \cdot \operatorname{ctg} 210°$;

3) $4\sin(-150°) \cdot \cos 300° \cdot \operatorname{tg} 240°$;

4) $8\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$.

(Использовать таблицу упражнения 106.)

115. Зная, что косинус и синус угла x равны абсциссе и ординате конца подвижного радиуса единичной окружности, образующего угол x с начальным радиусом, построить графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ для значений x в промежутке $[0; 2\pi]$.

116. 1) Показать на чертеже, для каких дуг α единичной окружности выполняется каждое из неравенств:

а) $|\sin\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$; б) $|\cos\alpha| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1$.

2) Установить, в какой части промежутка единичной окружности расположены начальная и конечная стороны угла α, если

а) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\alpha \geqslant 0{,}7341$; д) $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0{,}9237$; е) $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1{,}411$;

ж) $\cos\alpha \leqslant 0{,}3419$; з) $\cos\alpha \leqslant 0{,}6534$.

117. 1) При каких значениях аргумента справедливы равенства:

а) $3 - \sin\alpha = 2{,}5$; б) $2 + \cos\alpha = 4$;

в) $\operatorname{tg}\alpha + 5 = 75$; г) $2 + \operatorname{ctg}\alpha = 1{,}3$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $1 + \sin\alpha$; б) $\cos\alpha - 3$; в) $2\sin x + 2$; г) $1 - \cos x$.

§ 5. Вычисление значений тригонометрических функций по данному значению одной из них.

118. Установить, могут ли иметь место следующие равенства для одного и того же значения аргумента α:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$;

3) $\sin\alpha = -0{,}8$; $\cos\alpha = 0{,}6$; 4) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

119. (Устно.) Установить, могут ли иметь место следующие равенства для одного и того же значения аргумента α:

1) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -2\frac{2}{5}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

4) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$.

120. Найти косинус, тангенс и котангенс острого угла α, если

1) (устно) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; 3) $\sin\alpha \approx 0{,}281$;

2) (устно) $\sin\alpha = 0{,}6$; 4) $\sin\alpha \approx 0{,}5793$.

Указание. Каждый пример решить двумя способами: а) по таблицам найти угол α; б) вычислить по формулам (§ 11 учебника).

121. Найти синус, тангенс и котангенс тупого угла α, если

1) (устно) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$;

2) (устно) $\cos\alpha = -0{,}9$; 4) $\cos\alpha \approx -0{,}7538$.

122. Найти синус, косинус и котангенс угла α, если

1) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}124$ при $0° < \alpha < 90°$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ при $90° < \alpha < 180°$.

Решить двумя способами: а) по таблицам найти угол α и б) вычислить по формулам (§ 11 учебника).

123. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5357$ при $0° < \alpha < 90°$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}412$ при $270° < \alpha < 360°$.

124. Определить значения остальных тригонометрических функций аргумента α, если дано:

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{9}{41}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

3) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\frac{3}{2}\pi > \alpha > \pi$.

125. Определить значения тригонометрических функций аргумента α, если

1) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и $90° < \alpha < 180°$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $180° < \alpha < 270°$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ и $270° < \alpha < 360°$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и $180° < \alpha < 270°$.

126. 1) Зная, что $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, где $0 < a < b$ и $0° < \alpha < 90°$, найти значения остальных тригонометрических функций угла α.

2) Зная, что $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{b^2}$, найти значения остальных тригонометрических функций угла α. Какие значения могут принимать параметры a и b?

3) Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 1 + a$ и $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$. Какие значения может принимать параметр a?

127. 1) Найти значение выражения $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0° < \alpha < 90°$.

Указание. Решить двумя способами: а) зная $\sin\alpha$, найти $\operatorname{tg}\alpha$ и б) упростить данное выражение, заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

2) Найти значение выражения $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$ и $90° < \alpha < 180°$.

Указание. Решить двумя способами:
а) зная $\operatorname{tg}\alpha$, найти значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
б) упростить данное выражение, разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha$. Имеем ли право в данном случае делить на $\cos\alpha$ и почему?

128. 1) Найти значение выражения $\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ и $180° > \alpha > 90°$.

2) Найти значение выражения $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $270° > \alpha > 180°$.

Какими двумя способами можно решить каждый из примеров?

129. 1) Найти значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если

а) $\alpha = 0{,}3491$; б) $\alpha = 1{,}0949$; в) $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

2) Найти значения выражений:

а) $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$ при $\alpha = 0{,}6231$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{7}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha = 1{,}2377$.

§ 6. Преобразование выражений с тригонометрическими функциями и доказательство тождеств.

130. Выразить через одну тригонометрическую функцию:

1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ а) через $\sin\alpha$; б) через $\cos\alpha$.

Какое из этих двух преобразований приводит к выражению с наименьшим числом членов?

2) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ а) через $\sin\alpha$; б) через $\cos\alpha$.

Какое из этих двух преобразований приводит к рациональному выражению относительно тригонометрической функции?

3) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ а) через $\sin\alpha$; б) через $\cos\alpha$.

Какое из этих преобразований приводит к выражению более простого вида?

4) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

а) Уничтожьте иррациональность в знаменателе, умножив и знаменатель и числитель на $(1+\sin\alpha)$.

б) Уничтожьте иррациональность в числителе, умножив числитель и знаменатель на $(1-\sin\alpha)$.

Какое из этих двух преобразований приводит к выражению более простого вида?

5) Преобразовать выражение $\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}$ в дробь с одночленным знаменателем.

6) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Выразите $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и произведите указанные действия.

131. Упростить выражения:

1) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

Проверить справедливость выполненного преобразования, придав α значения: $\alpha=30°$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$; $\alpha=-225°$; $\alpha=146°$ и др.

Любое ли значение можно взять для α?

2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Проверить справедливость выполненного преобразования для $\alpha=90°$; $\alpha=180°$. Любое ли значение можно взять для α?

3) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha$; α содержится в промежутке $(0;\ 2\pi)$.

Какие значения не являются допустимыми в этом выражении для α? Почему?

4) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$.

Какие значения не являются допустимыми для α? Почему?

При решении примеров 5—14 ответьте на вопрос: какие значения не являются допустимыми в каждом из них для α?

5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; 6) $1-\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha$;

7) $(1+\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1-\cos\alpha)$; 8) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

9) (устно) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$; 10) (устно) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

11) (устно) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; 12) (устно) $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

13) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; 14) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

132. Упростить выражения:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha+1$; 4) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

5) $1+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$. Какие значения не являются допустимыми для α?

6) $(1-\sin^2\alpha)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha-1-\operatorname{ctg}^2\alpha$; 7) $\frac{\sin^2\beta}{1+\cos\beta}$.

Какие значения не являются допустимыми для β?

8) $\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta-1}$; 9) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Является ли допустимым для α значение 135°?

10) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(1+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$.

133. Упростить выражения:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$;

3) $\operatorname{tg}\alpha+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

5) $\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}$; 6) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$;

7) $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha$; 8) $\sin^4\beta-\cos^4\beta+\cos^2\beta$;

9) $\sin^2\beta+\cos^4\beta-\sin^4\beta$; 10) $\cos^4\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta+\sin^2\beta$.

134. Вычислить значения выражений наиболее рациональным способом:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ при $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$ при $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $270°<\alpha<360°$;

4) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$ при $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

5) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ при $\alpha=0{,}9643$;

7) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ при $\alpha=\frac{5}{4}\pi$;

8) $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$ при $\alpha=\frac{7}{4}\pi$;

9) $\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$ при $\begin{cases}\alpha=0{,}6184,\\ \beta=\frac{\pi}{6};\end{cases}$ 10) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ при $\alpha=1$.

135. 1) Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Найти $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
2) Дано $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$. Найти сумму квадратов и сумму кубов $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

3) Показать, что выражение $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ имеет постоянное значение при всех допустимых значениях α.

4) Показать, что выражение $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ имеет постоянное значение при всех допустимых значениях α.

5) Преобразовать выражение $x=\sqrt{A^2+B^2}$ при $A=a\cdot\sin\varphi$ и $B=a\cdot\cos\varphi$.

6) Вычислить $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ а) при $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{2}$; б) при $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4}$.

136. Доказать справедливость следующих тождеств:

1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$, приведя левую часть равенства к более простому виду;

2) $2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$, приведя правую часть равенства к более простому виду;

3) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$,

где $0^\circ<\alpha<90^\circ$, приведя по отдельности каждую часть его к одному и тому же наиболее простому выражению.

137. Доказать тождества:

1) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=4$;

3) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

5) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

6) $3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=1$;

7) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha$; $0^\circ<\alpha<90^\circ$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$; 9) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

10) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

138. Доказать тождества:

1) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}$;

3) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$; 4) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; при $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi k$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$;

6) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha} \equiv \cos\alpha - \sin\alpha$;

7) $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$;

8) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

9) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

10) $1 + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$;

11) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

12) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 0$;

13) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

§ 7. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции.

139. Построить угол x и составить общие формулы множества тех углов, конечная сторона каждого из которых совпадает с конечной стороной построенного угла, если

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; 3) $\cos x = \frac{1}{2}$.

140. В единичном круге построить углы, косинус каждого из которых равен:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0{,}4$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $0{,}9$; 5) $-\frac{2}{3}$.

Измерить транспортиром построенные углы. С какой точностью произведено измерение? Составить формулы множества всех углов (или дуг), косинус каждого из которых имеет данное значение.

141. В промежутке $[0; \pi]$ найти приближённо (по таблицам) значения аргумента α, если

1) $\cos\alpha = 0{,}2947$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7381$; 3) $\cos\alpha = 0{,}5342$;
4) $\cos\alpha = 0{,}75$; 5) $\cos\alpha = -0{,}6237$.

142. 1) Построить: а) $\arccos\frac{2}{3}$; б) $\arccos(-0{,}75)$;

2) Найти x из уравнений: а) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arccos\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$;

3) (устно) чему равен $\cos(\arccos 1)$?

4) (устно) чему равен $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$?

143. 1) Построить угол x и составить формулу множества всех тех углов, конечная сторона каждого из которых совпадает с конечной стороной построенного угла, если

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

2) В единичном круге построить углы, синус каждого из которых равен:

а) 0,6; б) $-\frac{1}{4}$; в) 0,25; г) $-\frac{5}{7}$; д) $-\frac{1}{2}$.

Измерить транспортиром построенные углы и найти по таблицам их приближённые значения. С какой точностью произвели измерение? Составьте формулы множества всех углов, синус каждого из которых имеет данное значение.

144. В промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ найти приближённо (по таблицам) значения аргумента α, если

1) $\sin\alpha = 0{,}4175$; 2) $\sin\alpha = 0{,}34$; 3) $\sin\alpha = -0{,}5346$;
4) $\sin\alpha = -0{,}8341$; 5) $\sin\alpha = 0{,}691$.

145. 1) Построить: а) $\arcsin 0{,}8$; б) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ (проверить по таблицам).

2) Найти x из уравнений: а) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; б) $\arcsin\frac{x}{3} = a$;

3) (устно) чему равен $\sin(\arcsin 1)$?

4) (устно) чему равен $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

146. 1) В единичном круге построить углы, тангенс каждого из которых равен:

а) 1,5; б) —1; в) 0,8; г) $2\frac{2}{3}$.

Измерить транспортиром построенные углы. С какой точностью произвели измерения? Составить формулы множества всех углов, тангенс каждого из которых имеет данное значение.

В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ найти приближенно (по таблицам) значения аргумента α, если

а) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}647$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2183$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}8$;
г) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}4321$.

147. 1) Построить: а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{arctg}(-1{,}5)$.

2) Найти x из уравнений: а) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = a$.

148. 1) В единичном круге построить углы, котангенс каждого из которых равен:

а) -2; б) $1{,}7$; в) $\frac{3}{7}$.

Измерить транспортиром построенные углы и составить формулы множества всех углов, котангенс каждого из которых имеет данное значение.

2) В промежутке $(0; \pi)$ найти приближённое (по таблицам) значение аргумента α, если

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7238$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}37$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}835$.

149. 1) Построить: а) $\operatorname{arc\,ctg}\, 1{,}2$; б) $\operatorname{arc\,ctg}\,(-0{,}6)$.

2) Найти x из уравнений: а) $\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} = b$;

3) (устно) чему равен $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2)$?

4) (устно) чему равен $\sin(\operatorname{arc\,tg} 1)$?

150. Упростить:

1) $4\arccos 0 - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arc\,ctg} 0 - \pi$;

2) $2\arccos(-1) - 4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arc\,ctg} 1$.

151. Решить следующие тригонометрические уравнения:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$. Найти сначала два значения x в промежутке $(0; 2\pi)$ и написать формулы множества всех дуг, каждая из которых удовлетворяет уравнению.

2) То же для уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) То же для уравнения $\operatorname{tg} x = 1$.

4) То же для уравнения $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

5) Решить следующие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg} x = -1$.

152. 1) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают нулевые значения:

а) $\cos x$; б) $\sin x$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{ctg} x$.

Выразить формулой множество всех таких значений.

2) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают наибольшие значения:

а) $\cos x$; б) $\sin x$; в) $2\sin x$; г) $\frac{1}{2}\cos x$.

Выразить формулой множество всех таких значений:

3) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают наименьшие значения:

а) $\cos x$; б) $\sin x$; в) $(\sin x + 1)$; г) $(1 - \cos x)$.

Выразить формулой множество всех таких значений.

4) Доказать справедливость следующих равенств:

а) $\sin(2\pi k + \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg}(\pi k + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(\pi k + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

k — любое целое число.

Решить следующие тригонометрические уравнения (№ 153—158) указанными способами:

153. Как алгебраические относительно данной тригонометрической функции:

1) $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$; 2) $\cos^2 x + \cos x = 1$;

3) $6\sin^4 x = 1 - \sin^2 x$; 4) $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$.

154. Разложением на множители:

1) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x = 0$; 4) $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

155. Преобразовать к уравнению с одной тригонометрической функцией:

1) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$; 2) $2\sin^2 x = 3\cos x$;

3) $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$; 4) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$.

156. Преобразовать к уравнению с одной тригонометрической функцией (решить, применяя таблицы квадратов чисел, квадратных корней, натуральных тригонометрических значений):

1) $\sin x - \cos x = 0{,}4721$; 2) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$; 3) $\cos x = 2\operatorname{tg} x$;

4) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$; 5) $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$.

157. Комбинируя ранее применённые способы:

1) $\cos x - 1 + 2\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 0$;

2) $1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 0$; 3) $\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = 1$;

4) $2\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$; 5) $\operatorname{tg} x = 2\sin x$.

158. Однородные относительно синуса и косинуса первого и второго порядка и сводящиеся к ним:

1) $\sin x = \cos x$; 2) $\sin x = \frac{7}{8}\cos x$;

3) $3\sin^2 x = \cos^2 x$; 4) $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\sin x \cdot \cos x$;

5) $\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$; 6) $1 - 3\cos^2 x = 2\sin x \cdot \cos x$;

7) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5 - \sin x \cdot \cos x$;

8) $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$;

9) $3\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2 x = 2$;

10) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 2$;

11) $3\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 0$.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ.

§ 8. Формулы сложения.

159. 1) Вычислить $\cos 75°$.

Указание. $75° = 45° + 30°$.

Вычислить $\cos 105°$.

Указание. $105° = 60° + 45°$.

160. $0 < \alpha < 90°$; $0 < \beta < 90°$; $\cos\alpha = 0{,}2534$; $\cos\beta = 0{,}6421$. В какой четверти расположена конечная сторона угла $(\alpha + \beta)$?

161. 1) Дано: $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\cos\beta = \frac{5}{13}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$. Найти: $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$.

2) Дано: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Найти $\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$.

162. 1) Вычислить: а) $\sin 105°$; б) $\sin 75°$.

2) Дано: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Найти: $\sin(\alpha + \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha - \beta)$.

3) Дано: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\sin\beta = \frac{12}{13}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Найти: $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$.

4) Дано: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\sin\beta = -0{,}6$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.

Найти: $\sin(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$.

5) Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\cos\beta = -\frac{7}{25}$. Найти: $\sin(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$.

163. 1) Проверить справедливость теоремы сложения для углов:

а) $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$; б) $\alpha = 120°$ и $\beta = 240°$.

2) Пользуясь теоремой сложения, доказать справедливость формул (см. гл. II, упр. 152):

а) $\sin(2\pi k + \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha$.

164. 1) Найти $\sin(45° + \alpha)$, если $\cos\alpha = -0{,}5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2) Найти $\cos(60° - \alpha)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

165. Вычислить $\sin 15°$ и $\cos 15°$, рассматривая угол в $15°$ как разность углов $45°$ и $30°$.

166. 1) Синус острого угла равен $\frac{15}{17}$. Найти косинус смежного ему угла.

2) Косинус угла треугольника равен $\frac{9}{41}$. Найти синус внешнего угла треугольника, смежного с данным углом.

167. 1) Найти $\cos\beta$, если $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{11}{14}$, если α и β — положительные и острые углы.

2) Найти $\sin\alpha$, если $\sin(45°-\alpha) = -\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{4}$.

168. 1) Доказать, что $\alpha+\beta = 90°$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$ и $0° < \alpha < 90°$ и $0° < \beta < 90°$.

2) Доказать, что $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

169. Доказать, что если α и β положительные острые углы, то $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

Доказать двумя способами: а) графически при помощи единичного круга; б) аналитически.

170. 1) Выразить $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\psi)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\psi)$ через тригонометрические функции углов α, β, γ и ψ.

2) Выразить $\sin(\alpha-\beta-\gamma)$ через тригонометрические функции углов α, β и γ.

171. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = \frac{12}{13}$; $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, где α, β, γ — острые углы. Найти $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

172. Косинус суммы двух углов равен 0,3, а косинус разности тех же углов равен 0,8. Найти произведение синусов данных углов.

173. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = 0{,}75$.

Найти по таблицам приближенные значения $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$. Вычислить те же значения по теореме сложения. Сравнить найденные значения.

174. Вычислить наиболее рациональным способом:

1) $\sin 10° \cdot \cos 20° + \cos 10° \cdot \sin 20°$.
2) $\sin 56° \cdot \cos 15° - \cos 56° \cdot \sin 15°$.
3) $\cos 17° \cdot \cos 13° - \sin 17° \cdot \sin 13°$.
4) $\cos 75° \cdot \cos 15° - \sin 75° \cdot \sin 15°$.
5) $\sin 7° \cdot \cos 37° - \cos 7° \cdot \sin 37°$.
6) $\sin 15° \cdot \sin 40° - \cos 40° \cdot \cos 15°$.
7) $\sin 22° + \sin 50° \cdot \cos 28° - \cos 50° \cdot \sin 28°$.

8) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$.

9) $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

10) $\sin(10^\circ+\alpha)\cdot\cos(20^\circ-\alpha)+\cos(10^\circ+\alpha)\cdot\sin(20^\circ-\alpha)$.

11) $\cos(50^\circ+\alpha)\cdot\cos(26^\circ+\alpha)-\sin(50^\circ+\alpha)\cdot\sin(26^\circ+\alpha)$.

175. Упростить выражения:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$. 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$. 4) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

5) $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

176. Упростить выражения:

1) $\frac{\sin 11^\circ\cdot\cos 15^\circ+\cos 11^\circ\cdot\sin 15^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\cdot\sin 12^\circ}$. 2) $\frac{\cos 65^\circ\cdot\cos 40^\circ+\sin 65^\circ\cdot\sin 40^\circ}{\sin 37^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\cdot\sin 12^\circ}$.

3) (устно) $\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\pm\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha$.

4) (устно) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\pm\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

5) (устно) $\sin(k\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos(k\alpha)\cdot\sin\alpha$.

177. Доказать тождества:

1) $\cos(\alpha+45^\circ)-\cos(\alpha-45^\circ)=-\sqrt{2}\sin\alpha$.

2) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$.

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$.

4) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

5) $\sin 15^\circ+\operatorname{tg}30^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6) $\cos 40^\circ+\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin 40^\circ=\frac{\cos(40^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$.

178. Доказать тождества:

1) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta$. 2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\frac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta+1$.

4) (устно) $\cos(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45^\circ-\alpha)-\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(45^\circ-\alpha)=0$.

5) $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$.

6) $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\sin(30^\circ+\alpha)$.

7) $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}$;

8) $\sin^2\alpha+\sin^2(120^\circ+\alpha)+\sin^2(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}$;

9) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

179. Вычислить наиболее рациональным способом значения следующих выражений:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ при $\alpha=0{,}6240$;

2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$ при $\alpha=0{,}2711$;

3) $\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$ при $\alpha=1{,}03$ и $\beta=\frac{2\pi}{3}$;

4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ при $\alpha=1{,}3113$;

5) $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$ при $\alpha=0{,}7941$ и $\beta=1{,}0472$.

180. Найти значение выражений (устно):

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\sin\left[\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin(-1)\right]$;

3) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin 1-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

181. Решить уравнения:

1) $\sin(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$; 2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;

3) $2\sin x=\sin(45^\circ-x)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$;

5) $\sin(\alpha+x)-\cos x\cdot\sin\alpha=\cos x$;
6) $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos^2\alpha$;
7) $\cos 2x\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\sin x$; 8) $\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$;
9) $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$; 10) $\cos 3x\cdot\cos 4x=\cos 7x$.

Тангенс суммы и разности.

182. 1) Вычислить $\operatorname{tg}105^\circ$.
2) Вычислить: а) $\operatorname{tg}75^\circ$; $\operatorname{tg}15^\circ$.
3) $0^\circ<\alpha<90^\circ$; $0^\circ<\beta<90^\circ$; $\operatorname{tg}\alpha=0{,}7537$; $\operatorname{tg}\beta=1{,}345$. В какой четверти расположена конечная сторона угла $(\alpha+\beta)$?

183. 1) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

2) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$. Найти $\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)$.

184. 1) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$. Найти: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

2) Найти: $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

185. 1) Найти: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, $\sin\beta = 0{,}6$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

2) Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

3) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$.

4) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$.

5) Найти $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -1$ и $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

186. 1) Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, причем α и β острые углы, то $\alpha+\beta = 45°$. Доказать.

2) Тангенсы двух острых углов соответственно равны 2 и 3. Доказать, что сумма углов равна 135°.

3) Тангенсы двух острых углов соответственно равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{7}$. Доказать, что разность этих углов равна 45°.

4) Тангенсы трёх острых углов соответственно равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$. Доказать, что сумма этих углов равна 45°.

187. Упростить выражения (устно):

1) $\frac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}5°}{1 - \operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}5°}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}70° - \operatorname{tg}35°}{\operatorname{tg}70°\cdot\operatorname{tg}35° + 1}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}27° + \operatorname{tg}18°}{\operatorname{tg}27°\cdot\operatorname{tg}18° - 1}$;

4) $\frac{\operatorname{tg}65° - \operatorname{tg}35°}{1 + \operatorname{tg}65°\cdot\operatorname{tg}35°}$; 5) $\frac{\operatorname{tg}4\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1 - \operatorname{tg}4\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}7\alpha - \operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}7\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha + 1}$;

7) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$; 8) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}3\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha}$.

Для упражнения 5—8 указать, какие значения для аргумента α не являются допустимыми:

9) $\frac{\operatorname{tg}49° - \operatorname{tg}19°}{1 + \operatorname{tg}49°\cdot\operatorname{tg}19°}$; 10) $\frac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25°}{1 - \operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}25°}$.

188. Доказать тождества:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1$.

2) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

4) $\operatorname{tg}(45° + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}(45° + \alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} - \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = -2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

6) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

189. Сумма тангенсов двух углов равна 2, а тангенс суммы этих углов равен 4. Найти тангенс каждого угла.

190. Отношение синуса суммы двух углов к синусу их разности равно $\frac{1}{2}$. Разность тангенсов этих углов равна 2. Найти сумму тангенсов этих углов.

191. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg} x.$

2) $\operatorname{tg}(x+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(x-\alpha)=m.$

§ 9. Формулы приведения.

192. Вычислить по формулам приведения:

1) $\sin 120°$; $\cos 150°$; $\operatorname{tg} 135°$; $\operatorname{ctg} 120°$; $\sin(-135°)$; $\cos(-120°)$.
2) $\sin 225°$; $\cos 240°$; $\operatorname{tg} 210°$; $\sin(-240°)$; $\cos(-210°)$.
3) $\sin 300°$; $\cos 315°$; $\operatorname{tg} 330°$; $\sin(-330°)$; $\cos(-300°)$.

193. Вычислить:

1) $\sin(-300°)+\cos(-225°)+\operatorname{tg}(-330°)+\operatorname{ctg}(-240°)$.
2) $\sin^2 120°+\cos^2 150°+\operatorname{tg}^2 210°-\operatorname{ctg}^2 225°$.
3) $\sin^2(-330°)-\cos^2(-120°)-\operatorname{tg}^2(-240°)+\operatorname{ctg}^2(-330°)$.
4) $6\sin 120°\cdot\operatorname{tg} 300°\cdot\operatorname{ctg} 225°$.
5) $4\sin 330°\cdot\cos(-240°)\cdot\operatorname{tg} 120°-2\cos 150°\cdot\operatorname{tg}(-315°)$.
6) $\frac{\cos(-150°)}{\cos 330°}-\frac{\operatorname{tg} 150°\cdot\sin 300°}{\cos 360°}+\cos(-240°)\cdot\operatorname{ctg} 120°$.

194. Следующие тригонометрические функции привести к функциям положительных углов, меньших 45°:

1) $\sin 86°$; $\cos 55°$; $\operatorname{tg} 73°20'$; $\operatorname{ctg} 45°45'$.
2) $\sin 175°$; $\cos 103°$; $\operatorname{tg} 159°$; $\operatorname{ctg} 188°\ 20''$.
3) $\sin 256°25'$; $\cos 220°13'$; $\operatorname{tg} 184°$; $\operatorname{ctg} 261°$.
4) $\sin 311°$; $\cos 296°40'$; $\operatorname{tg} 351°6'$; $\operatorname{ctg} 325°15'$.
5) $\sin 560°$; $\cos 846°$; $\operatorname{tg} 758°$; $\operatorname{ctg} 1000°$.
6) $\sin(-310°)$; $\cos(-500°)$; $\operatorname{tg}(-405°)$; $\operatorname{ctg}(-820°)$.

195. Следующие тригонометрические функции привести к функциям углов:

1) заключённых в промежутке $[0°; 45°]$:
$\sin 130°$; $\cos 820°$; $\operatorname{tg} 930°$; $\operatorname{ctg} 470°$;
$\sin(-500°)$; $\cos(-415°)$; $\operatorname{tg}(-100°)$; $\operatorname{ctg}(-840°)$;

2) заключённых в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$:
$\sin 0{,}7\pi$; $\cos 3{,}2\pi$; $\operatorname{tg} 4{,}8\pi$; $\operatorname{ctg} 2{,}9\pi$.

196. Следующие тригонометрические функции привести к функциям углов:

1) заключённых в промежутке $[0°; 45°]$:
$\sin 170°$; $\cos 350°$; $\operatorname{tg} 190°$; $\operatorname{ctg} 340°$;
$\sin(-340°)$; $\cos(-760°)$; $\operatorname{tg}(-560°)$; $\operatorname{ctg}(-690°)$;

2) заключённых в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:
$\sin(-2{,}1\pi)$; $\cos 3{,}4\pi$; $\operatorname{tg} 1{,}7\pi$; $\operatorname{ctg}(-1{,}9\pi)$;

197. 1) Найти в промежутке $[0; 2\pi]$ углы, косинусы которых равны: $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Найти в промежутке $[0; 2\pi]$ углы, синусы которых равны: -1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Найти в промежутке $[0; 2\pi]$ углы, тангенсы которых равны: 1; $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

198. Найти угол α, если

1) $\sin\alpha = 0{,}8512$ и $90° < \alpha < 180°$;

2) $\sin\alpha = -0{,}457$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

3) $\cos\alpha = -0{,}3415$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

4) $\cos\alpha = 0{,}6710$ и $270° < \alpha < 360°$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2$ и $180° < \alpha < 270°$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}3462$ и $-\frac{3}{2}\pi < \alpha < -\pi$.

199. Вычислить:

1) $\arcsin(-0{,}253)$;
2) $\arcsin(-0{,}7824)$;
3) $\arccos(-0{,}5638)$;
4) $\arccos 0{,}4197$;
5) $\operatorname{arctg}(-2{,}341)$;
6) $\operatorname{arctg} 11{,}59$;
7) $\operatorname{arctg} 1{,}327$;
8) $\operatorname{arcctg}(-0{,}3781)$.

200. Найти такие положительные и отрицательные углы, по абсолютной величине меньшие 360°, чтобы

1) синус каждого из них был равен $\sin 40°$,
2) косинус каждого из них был равен $\cos 43°$,
3) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{tg} 15°$,
4) синус каждого из них был равен $\cos 20°$,
5) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{ctg} 32°$.

201. 1) Найти $\sin(270° + \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $90° < \alpha < 180°$.

2) Найти $\cos(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $180° < \alpha < 270°$.

3) Найти $\operatorname{tg}(360° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

202. 1) Выразить тригонометрические функции угла 140° через функции его смежного угла.

2) Синус острого угла параллелограмма равен $\frac{3}{5}$. Найти косинус тупого угла данного параллелограмма.

3) Тангенс суммы двух углов треугольника равен 2. Найти синус третьего угла треугольника.

4) Косинус одного из углов вписанного в окружность четырёхугольника равен $\frac{12}{13}$. Найти синус противолежащего ему угла.

5) Доказать, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними (рассмотреть случай тупого угла).

203. Упростить выражения:

1) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$.

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

3) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$.

4) $\frac{\cos^2(360^\circ - \alpha) + \sin^2(270^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}^2(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}^2(270^\circ + \alpha)}$. 5) $\frac{\sin(-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

6) $2\sin 40^\circ + \cos 130^\circ - 3\sin 160^\circ - \cos(-110^\circ)$.

7) $3\operatorname{tg} 200^\circ - 2\sin(-80^\circ) + \operatorname{ctg} 290^\circ + \cos(-10^\circ)$.

8) $\sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 340^\circ$.

9) $\frac{\cos 304^\circ \cdot \operatorname{tg} 416^\circ - \operatorname{tg} 214^\circ \cdot \operatorname{tg}(-56^\circ)}{\operatorname{ctg} 214^\circ + \cos 326^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-56^\circ)}$.

10) $\frac{\sin 160^\circ \cdot \cos 70^\circ - \cos 200^\circ \cdot \sin 70^\circ - \cos 235^\circ \cdot \sin 215^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{ctg} 215^\circ}$.

11) $\frac{\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 320^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) \cdot \cos 50^\circ \cdot \sin 220^\circ \cdot \cos 360^\circ}$.

12) $\sin(\alpha - 90^\circ) + \cos(\alpha - 180^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) + \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$;

13) $\operatorname{tg}^2(\alpha - 180^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ) + \sin^2(\alpha + 180^\circ) + \sin^2(270^\circ - \alpha)$.

14) $\operatorname{tg}^2(\alpha - 360^\circ) \cdot \sin^2(\alpha - 270^\circ) + \cos^2(360^\circ + \alpha) -$
$- 2\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)$.

15) $\frac{\sin^3(\alpha - 270^\circ) \cdot \cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha - 90^\circ) \cdot \cos^3(\alpha - 270^\circ)}$.

204. Доказать тождества:

1) $\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$; 2) $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$;

3) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$; 4) $\sin(150^\circ + \alpha) = \sin(30^\circ - \alpha)$;

5) $\frac{\sin(360^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)} = 1$;

6) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - \sin(\pi + \alpha)\right]}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\left[\cos(\alpha + 2\pi) + \sin(\alpha - 2\pi)\right]} = -1$;

7) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+1=0;$

8) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\sin\alpha;$

9) $\dfrac{\sin^3(-212^\circ)\cdot\cos 302^\circ+\cos^3(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ)\cdot\cos(-8^\circ)+\sin 368^\circ\cdot\sin(-172^\circ)-\sin 58^\circ\cdot\sin 148^\circ}=$
$=\cos 32^\circ-\sin 32^\circ;$

10) $\sin^2(30^\circ+\alpha)+\sin^2(240^\circ-\alpha)=1;$

11) $\dfrac{\cos^2(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-360^\circ)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-270^\circ)}=1;$

12) $\operatorname{tg}10^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}50^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}70^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=1.$

205. Доказать, что если α и β — смежные углы, то

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\beta}{2}-x\right).$$

206. Определить наиболее рациональным способом значения выражений:

1) $8\sin(450^\circ-x)+5\sin(x-90^\circ)$ при $x=2{,}4458$;

2) $\sin(x-270^\circ)\cdot\sin(x-180^\circ)$ при $x=3{,}4545$.

207. Найти значения выражений (устно).

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\pi+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\arccos\frac{2}{5}\right)$;

5) $\operatorname{ctg}(2\pi-\operatorname{arctg}1)$.

208. Решить уравнения:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+2\cos(2\pi-x)=3;$

2) $\sin(x-90^\circ)+\sin(x-180^\circ)=0;$

3) $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$

4) $\sin(x+90^\circ)+\operatorname{ctg}(360^\circ-x)=0;$

5) $\sin x\approx 0{,}851$, если $90^\circ<x<180^\circ;$

6) $\operatorname{tg}x=-12{,}61$, если $-\frac{\pi}{2}<x<0.$

§ 10. Формулы удвоения аргументов и деления аргументов пополам.

Формулы удвоения аргументов.

209. 1) Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < 90°$.

2) Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

3) Найти $\sin 10°$ и $\cos 10°$, если $\sin 5° \approx 0{,}0872$.

4) Найти $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$, если $\cos\frac{\pi}{14} \approx 0{,}975$.

5) Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

210. 1) Выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$: а) только через $\sin\alpha$; б) только через $\cos\alpha$.

2) Выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

211. 1) Дано: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2n}{1+n^2}$. Найти: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $n > 0$ и $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Дано: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$. Найти: $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $a > 0$ и $b > 0$.

3) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Найти: $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta)$.

4) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$. Найти: $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)$.

212. Решить уравнения:

1) $2\cos 2x = 1$; 2) $\sqrt{2}\sin 2x = 1$;

3) $\cos(2x + 30°) = 0{,}8283$; 4) $\operatorname{tg} 2x = 19{,}41$.

213. 1) Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Найти: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

2) Дано: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}$. Найти $\sin 4x$.

214. 1) Найти значение выражения $\frac{\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Найти значение выражения $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{15}$.

215. 1) Доказать, что $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Существуют ли значения α, при которых $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$?

2) Доказать, что $\cos 2\alpha < 2\cos\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Существуют ли значения α, при которых $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$?

3) Доказать, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Существуют ли значения α, при которых $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$?

216. 1) Выразить $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$ соответственно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

2) Найти $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

217. 1) В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{5}{13}$; определить синус и косинус угла при вершине.

2) Синус угла, образованного диагональю ромба с его стороной, равен 0,2. Найти косинусы углов ромба.

218. Найти значения выражений наиболее рациональным способом:

1) $2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$;
2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$;
3) $\sin 13^\circ \cdot \sin 77^\circ$;
4) $\cos^2 10^\circ - \sin^2 10$;
5) $\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ$;
6) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$;
7) $\frac{2\operatorname{tg} 40^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 40^\circ}$;
8) $\frac{\operatorname{tg} 22^\circ 5'}{1-\operatorname{tg}^2 22^\circ 5'}$;
9) $2\sin 0{,}7034 \cdot \cos 0{,}7034$;
10) $\cos^2 0{,}6167 - \sin^2 0{,}6167$;
11) $\cos^2 1{,}3963 - \sin^2 1{,}3963$;
12) $1 - 2\sin^2 1{,}2789$.

219. Определить устно значения выражений:

1) $2\sin 22^\circ 30' \cdot \cos 22^\circ 30'$;
2) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;
3) $\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin^2 22^\circ 30' - \cos^2 22^\circ 30'$;
5) $1 - 2\sin^2 15^\circ$;
6) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;
7) $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$;
8) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

220. Упростить выражения (устно):

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
2) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;
3) $1 - 2\sin^2\alpha$;
4) $2\cos^2\alpha - 1$;
5) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$;
6) $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;
7) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;
8) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;
9) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$;
10) $\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$;
11) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;
12) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$;
13) $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$;
14) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

221. Доказать справедливость равенств:

1) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ=\frac{1}{4}$.

Указание. Умножить и разделить левую часть равенства на $\cos 18^\circ$.

3) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$; 4) $\cos 10^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{2}\sin 20^\circ$;

5) $\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ=\frac{1}{2}\cos 10^\circ$;

6) $2\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(45^\circ-\alpha)=\cos 2\alpha$;

7) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha$;

8) $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$; 9) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$;

10) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$;

11) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$;

12) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$;

13) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=1$.

222. Вычислить наиболее рациональным способом:

1) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$ при $\alpha=\frac{7}{6}\pi$;

2) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$ при $\alpha=0{,}4320$;

3) $\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)$ при $\alpha=\frac{5}{3}\pi$ и $\beta=1{,}2220$;

4) $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$ при $\alpha=1{,}4946$.

223. Вычислить (устно):

1) $\sin(2\arcsin 0{,}5)$; 2) $\sin(2\arcsin 1)$; 3) $\cos[2\arccos(-1)]$; 4) $\cos(2\arccos 1)$; 5) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 1)$.

224. Большее основание трапеции служит диаметром описанной около неё окружности, радиус которой равен R. Острый угол трапеции α. Определить площадь трапеции.

225. В угол 2α вписан круг радиуса R. К этому кругу проведена касательная, перпендикулярная к биссектрисе угла (между вершиной угла и окружностью). Определить периметр отсечённого треугольника.

Формулы деления аргументов пополам.

226. 1) Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{119}{169}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$ и $270°<\alpha<360°$.

3) Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $180°<\alpha<270°$.

227. Вычислить, применяя формулы деления аргумента пополам: 1) $\sin 15°$, $\cos 15°$ и $\operatorname{tg} 15°$; 2) $\sin 7°30'$ и $\cos 7°30'$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$.

228. Найти по таблицам $\cos 50°$, а затем, пользуясь формулами деления, вычислить $\sin 25°$, $\cos 25°$ и $\operatorname{tg} 25°$.

Найденные результаты сравнить с значениями в таблицах.

229. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{7}{25}$; определить синус и косинус угла при основании.

230. 1) Косинус центрального угла, опирающегося на данную дугу, меньшую четверти окружности, равен $\frac{1}{9}$. Найти синус, косинус и тангенс вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.

2) Известно, что площадь ромба вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}ab$ (1), где a и b — его диагонали. Для площади ромба справедлива также формула $S=c^2\sin\alpha$, где c — сторона ромба и α — угол ромба. Вывести эту формулу из (1), пользуясь тригонометрическими функциями острого угла в прямоугольном треугольнике.

231. Дуга меньшего сегмента круга радиуса R содержит $\alpha°$. Найти высоту и площадь этого сегмента.

232. 1) Вычислить $\sin\frac{\alpha}{4}$, если $450°<\alpha<540°$ и $\sin\alpha=\frac{336}{625}$.

2) Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, если $0°<\frac{\alpha}{4}<90°$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

233. Упростить выражения:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$;

3) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$; 4) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$;

5) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{1+\cos\frac{\alpha}{4}}}$; 6) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$;

7) $\sqrt{\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$; 8) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$.

234. Доказать тождества:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

5) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 6) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

7) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha$; 10) $\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

11) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$;

12) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

235. Вычислить (устно):

1) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin 1\right)$; 2) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos 1\right)$; 4) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos 0\right)$;

5) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

236. Решить уравнения:

1) $\sin x\cdot\cos x=0{,}25$; 2) $\sin^2 x-\cos^2 x=0{,}5$;

3) $\sin 2x=\sin x$; 4) $a\sin x=b\cos\frac{x}{2}$;

5) $1+\sin^2 2x=4\sin^2 x$; 6) $\cos 2x=\cos x$;

7) $\cos 2x=2\sin^2 x$; 8) $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x$;

9) $\operatorname{tg} 2x=3\operatorname{tg} x$; 10) $\sin 3x=2\sin x$;

11) $\cos 3x=4\cos^2 x$; 12) $\cos 2x=\cos x-\sin x$.

237. Решить уравнения, выразив $\sin x$ и $\cos x$ через тангенс половинного аргумента:

1) $\sin x+\cos x=1\frac{1}{4}$; 2) $4\sin x+3\cos x=2$.

§ 11. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

238. 1) Вычислить значения выражений двумя способами: непосредственным перемножением натуральных значений из таблиц и преобразовав предварительно произведение в сумму.
$\cos 23° \cdot \cos 17°$; $\sin 16° \cdot \sin 34°$; $\sin 11° \cdot \cos 10°$; $\cos 0{,}253 \cdot \cos 0{,}345$; $\cos 0{,}4581 \cdot \sin 0{,}8127$.

2) Не пользуясь таблицей, найти значения выражений:
$\cos 45° \cdot \cos 15°$; $\sin 105° \cdot \sin 75°$; $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}$.

239. Преобразовать произведения в сумму:

1) $\cos 20° \cdot \cos 10°$; 2) $\cos 18° \cdot \cos 46°$; 3) $\cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}$;

4) $\sin 40° \cdot \sin 4°$; 5) $2 \sin 6° \cdot \sin 24°$; 6) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$.

7) $\sin 12° \cdot \cos 42°$; 8) $2 \sin 8° \cdot \cos 4°$; 9) $\sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$;

10) $2 \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha$; 11) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha$; 12) $\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
13) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha$; 14) $\sin 2\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)$;
15) $\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\beta - \alpha)$; 16) $2 \sin 40° \cdot \cos 10° \cdot \cos 8°$;
17) $4 \cos 8° \cdot \cos 10° \cdot \cos 6°$; 18) $4 \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha$;
19) $2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$;
20) $8 \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos(\gamma - \beta)$.

240. Представить в виде сумм тригонометрических функций 1-й степени, пользуясь формулами кратного аргумента; вычислить приближённые значения полученных выражений при $\alpha = 10°20'$; $\alpha = 0{,}8741$; $\alpha = 80°41'$.

1) $\sin^2 \alpha$; $\sin^3 \alpha$; $\cos^4 \alpha$; $\sin^4 \alpha$.
2) $\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; $\cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; $\sin^3 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

241. Преобразовать сумму в произведение:
1) $\cos 50° + \cos 20°$; 2) $\cos 18° - \cos 10°$;
3) $\cos 4° - \cos 28°$; 4) $\sin 26° + \sin 14°$;
5) $\sin 73° - \sin 36°$; 6) $\sin 7° - \sin 19°$;
7) $\sin 46° + \cos 50°$;

8) $\cos 36° - \sin 16°$; 9) $\sin 1° + \cos 64°$;

10) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}$; 11) $\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{18}$; 12) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{12}$;

13) $\operatorname{tg} 12° + \operatorname{tg} 32°$; 14) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}$; 15) $\operatorname{tg} \frac{3}{5}\pi - \operatorname{ctg} \frac{1}{5}\pi$.

242. Преобразовать сумму в произведение:

1) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$; 4) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;

5) $\sin(40° + \alpha) - \sin(40° - \alpha)$; 6) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

243. Преобразовать в произведение:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\cos\beta - \sin\alpha$;

4) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 5) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$;

7) $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°}$; 8) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$; 9) $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$;

10) $\dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{\cos 6x + \cos 4x}$; 11) $\sin 10° + \sin 11° + \sin 15° + \sin 16°$;

12) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\alpha$;

13) $\cos 31° + \cos 13° + \cos 8° + \cos 36°$;

14) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

Какое условие достаточно, чтобы сумма четырёх синусов или косинусов могла быть преобразована в произведение?

Составить два примера на преобразование суммы четырёх синусов или косинусов в произведение.

244. Преобразовать в произведение:

1) $1 + \cos 2\alpha$; 2) $1 - \cos\alpha$; 3) $1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

4) $1 + \cos 40°$; 5) $1 - \cos 17°$; 6) $\cos 31° - 1$;

7) $1 + \sin 50°$; 8) $1 + \sin\alpha$; 9) $1 - \sin\alpha$;

10) $1 - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 11) $1 - \sin 3°8'$; 12) $\sin 26° - 1$;

13) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$; 14) $\dfrac{1 - \cos 50°}{\cos 40°}$; 15) $\dfrac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)}$;

16) $1 \pm \operatorname{tg}\alpha$; 17) $1 \pm \operatorname{ctg}\beta$; 18) $\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

245. Преобразовать в произведение:

1) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$;

3) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;

5) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$; 6) $1 - \sin\alpha + \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;

7) $\dfrac{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}$; 8) $\dfrac{1 - 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{1 + 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}$;

9) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$; 10) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;

11) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$;

12) $\sin(5\alpha + \beta) + \sin(3\alpha + \beta) + \sin 2\alpha$;

13) $\cos 12° - 2\cos 24° + \cos 36°$;

14) $\sin 19° + \sin 25° + \sin 6°$; 15) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$.

246. Введением вспомогательного угла преобразовать сумму в произведение:

1) $1 + 2\cos\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha$; 3) $1 + 2\sin 2\beta$; 4) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$;

5) $1 + \sqrt{2}\cos\alpha$; 6) $\sqrt{2}\sin\alpha - 1$; 7) $1 - 4\sin^2\alpha$;

8) $3 - 4\cos^2\alpha$; 9) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$; 10) $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$.

247. Доказать справедливость равенств:

1) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ = 0$;

2) $\sin 18^\circ + \cos 48^\circ - \cos 12^\circ = 0$;

3) $\cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ = \sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$;

4) $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 11^\circ + \cos 31^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$;

5) $\dfrac{\sin 14^\circ + \sin 28^\circ - \sin 42^\circ}{\sin 42^\circ + \sin 14^\circ - \sin 56^\circ} = \dfrac{1}{2\cos 14^\circ}$.

248. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\operatorname{ctg}\dfrac{\beta+\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 6) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$;

7) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$;

8) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$;

9) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha)$; 10) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha - 45^\circ)$;

11) $4\sin^2\alpha - 3 = 4\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

12) $4\cos^2\alpha - 1 = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

249. Доказать тождества:

1) $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ = \dfrac{3}{16}$;

2) $16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ = 3$;

3) $8\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$.

250. Доказать тождества:

1) $\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

3) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2 \alpha$;

6) $\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

7) $\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} = -2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)$;

8) $\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - \sin^2(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$;

9) $\frac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

10) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

11) $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

12) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha$;

13) $\frac{\sin^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha - 4 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$;

14) $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$;

15) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha - \sin\alpha = -2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

16) $\cos\left(\frac{3}{10}\pi - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10} + \alpha\right) = \sin\alpha$;

17) $\frac{\left(\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

251. Решить тригонометрические уравнения:

1) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$;
2) $\cos 2x \cdot \cos 4x = \cos 5x \cdot \cos x$;
3) $\sin 2x \cdot \sin 6x = \sin 3x \cdot \sin 5x$;
4) $\sin x \cdot \sin 3x = \sin 5x \cdot \sin 7x$;
5) $\cos 2x \cdot \sin 4x = \cos x \cdot \sin 5x$;
6) $\cos 3x \cdot \sin 7x = \cos 2x \cdot \sin 8x$;
7) $\sin 6x - \sin 4x = 0$;
8) $\cos 4x + \cos x = 0$;
9) $\sin 5x = \sin x$;
10) $\cos 2x = \cos x$;
11) $\cos 3x = \sin x$;
12) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;
13) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$;
14) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$;

15) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = 2$; 16) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;

17) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$; 18) $\sin^3 x \cdot \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$;

19) $\operatorname{tg}(2x-1) \cdot \operatorname{tg}(3x+1) = 1$; 20) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$.

252. К двум внешне касающимся друг друга кругам проведены две общие внешние касательные, образующие угол α. Радиус большего круга R. Найти радиус меньшего круга.

253. Радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник с острым углом α, равен r. С центром в вершине угла α построена окружность, касающаяся противолежащего катета. Определить длину этой окружности.

254. Основание равнобедренного треугольника равно b, угол при основании равен α. Определить периметр треугольника.

255. 1) Определить площадь треугольника по двум его углам α и β и по высоте h_c, опущенной из вершины третьего угла.

2) Доказать, что площадь всякого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

256. Вывести соотношения для аргументов α и β, при которых справедливы равенства:

1) $\sin \alpha = \sin \beta$; 2) $\cos \alpha = \cos \beta$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

ГЛАВА IV.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 12. Общие свойства тригонометрических функций.

Область определения.

257. 1) Построить:
а) $\arccos(-0{,}7)$; б) $\arcsin 0{,}2$; в) $\operatorname{arctg} 3{,}5$; г) $\operatorname{arcctg} 0{,}4$.

2) Построить в единичном круге центральный угол x и соответствующую ему дугу, если

а) $\cos x = \frac{5}{12}$; б) $\sin x = -\frac{2}{5}$;

в) $\operatorname{tg} x = \frac{4}{7}$; г) $\operatorname{ctg} x = -2{,}3$.

В каждом случае составить формулу для множества всех значений x, удовлетворяющих данному условию.

258. Вычислить значения:

1) а) $\cos 2$; б) $\sin 50$; в) $\operatorname{tg} 0{,}5231$;

г) $\cos(\pi - 1)$; д) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$.

2) а) $(x + \sin x)$ при $x = 0{,}5$; при $x = 1{,}232$;

б) $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0{,}12$; при $x = \pi$;

в) $x \cos x$ при $x = 0{,}3$; при $x = \frac{\pi}{2}$; при $x = 2{,}5$.

259. Вычислить значения каждой функции:

1) а) $y = 2\cos x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = \frac{1}{2}\sin x$;

г) $y = \sin\frac{x}{2}$ при значениях аргумента x: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π; 2π; $\frac{3}{4}\pi$; 0,2375; 1,249; 1,478. Какова область определения каждой функции? При каких значениях аргумента каждая функция принимает нулевые значения? Выразите формулой множество всех таких значений аргумента x.

2) а) $y = \sin(\sin x)$ при $x = \frac{\pi}{2}$; при $x = \pi$; при $x = \frac{\pi}{6}$; при $x = 1{,}483$.

б) $y = \cos(\cos x)$ при $x = \frac{\pi}{2}$; при $x = 2\pi$; при $x = \frac{\pi}{3}$; при $x = 0{,}7632$.

в) $y = \sin(\cos x)$ при $x = \pi$; при $x = \frac{\pi}{4}$; при $x = 0{,}4529$.

Какова область определения каждой из данных функций?

Найти значения аргумента x, при которых функция обращается в нуль. Выразить формулой множество всех таких значений аргумента x и показать эти значения на числовой оси.

3) а) $y = \sin x^2$ при $x = \pm\frac{1}{2}$; при $x = 1$; при $x = \frac{\pi}{4}$; при $x = \pm 5$;

б) $y = \operatorname{tg} 2x$; $y = \operatorname{tg} x^2$ при $x = 1$; при $x = \frac{5\pi}{4}$; при $x = \pm 2{,}5$.

При каких значениях аргумента x функции $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{tg} x^2$ теряют смысл?

260. На единичной окружности показать промежутки, в которых нижеуказанные функции принимают положительные (отрицательные) значения.

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $1 - \sin x$;

5) $\cos x - 1$; 6) $\operatorname{ctg} 2x$; 7) $\sin 2x$; 8) $\cos 2x$.

261. При каких значениях аргумента x каждая из нижеследующих функций теряет смысл? Построить эти значения на числовой оси.

1. а) $\frac{1}{1+\cos x}$; б) $\frac{1}{\cos x}$; в) $\frac{1}{\cos 2x}$; г) $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$;

   д) $\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$; е) $\frac{1}{2+\cos x}$.

2. а) $\frac{1}{1-\sin x}$; б) $\frac{1}{\sin x}$; в) $\frac{1}{\sin 3x}$; г) $\frac{1}{\sin\frac{x}{4}}$;

   д) $\frac{1}{\sin x+\cos x}$; е) $\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

3. а) $\operatorname{tg} x$; б) $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$; в) $\frac{1}{\operatorname{tg} x^2}$ г) $\operatorname{tg} 2x$;

   д) $\operatorname{tg} 3x$; е) $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; ж) $\frac{1}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

262. Доказать справедливость следующих равенств; в каждом примере установить область определения функций, стоящих в левой и в правой частях равенства в отдельности:

1) $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$;

4) $\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$; 5) $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=2\cos x$.

263. Указать область определения функций:

1) $\sin 2x$; 2) $\cos 2x$; 3) $\cos\frac{x}{2}$; 4) $\sin\frac{x}{2}$;

5) $\operatorname{tg} 2x$; 6) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} 2x$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

264. Указать область определения каждой функции:

1) а) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $y=\frac{1}{\sin x^2}$;

   г) $y=\sqrt{\sin x}$; д) $y=|\sin x|$; е) $y=\frac{1}{\sin x}$;

2) а) $y=\sqrt{1-\sin x}$; б) $y=\sqrt{\cos 2x}$; в) $y=\frac{x}{\sin x}$;

   г) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$; д) $y=\lg\cos x$; е) $y=\sqrt{\lg\sin x}$.

3) а) $y=\sin x\cdot\cos x$; б) $y=1-\cos x$; в) $y=\frac{x}{1+\cos x}$;

   г) $y=\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

4) а) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$; б) $y=\lg(1-\operatorname{tg} x)$; в) $y=\sqrt{1-2\sin x}$;

   г) $y=2\cos x-\sqrt{3}$.

265. 1) На единичной окружности показать промежутки, в которых выполняются неравенства:

а) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$;

г) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$;

ж) $\operatorname{ctg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\cos x > \frac{1}{2}$; и) $|\sin 2x| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $|\operatorname{tg} x| \geqslant 1$.

2) На единичной окружности показать промежутки, в которых выполняются системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \leqslant \frac{1}{2} \\ \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

3) На единичной окружности показать промежутки, в которых выполняется каждое из следующих неравенств:

а) $\sin x \cdot \cos x > 0$; б) $\sin x \cdot \cos x < 0$; в) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x < 0$.

Ограниченность и неограниченность.

266. 1) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают нулевое значение:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 3x$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $\operatorname{ctg}(\pi + x)$.

Выразить формулой множество всех таких значений.

2) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают наибольшие значения:

а) $\cos 3x$; б) $\sin \frac{x}{2}$; в) $2\sin 2x$; г) $\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Выразить формулой множество всех таких значений.

3) При каких значениях аргумента x следующие функции принимают наименьшие значения:

а) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\sin(x + 1)$; г) $(-\cos x)$.

Выразить формулой множество всех таких значений.

267. Определить множество значений для нижеследующих функций, если x есть любое действительное число:

1) $1 - \sin x$; 2) $\sin x \cdot \cos x$; 3) $\cos 2x$; 4) $\sin 2x$;

5) $2\cos x$; 6) $\sin x + 1$; 7) $\sin \frac{x}{2}$; 8) $\sin x + \cos x$.

268. 1) Найти наибольшие и наименьшие значения следующих функций и указать соответствующие значения аргумента x, построив их на числовой оси:

а) $2 + \cos 2x$; б) $1 + 2\sin 2x$; в) $1 - \sin \frac{x}{2}$;

г) $1+5\sin^2\frac{x}{2}$; д) $3\cos^2 3x+5\sin^2 3x$; е) $1+\operatorname{tg}^2 2x$;

ж) $1+|\sin x|$; з) $\cos^2 x$; и) $\frac{1}{2}\cos 2x$; к) $2\cos\frac{x}{2}$;

л) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$; м) $2\cos^2 x+\sin^2 x$.

2) Может ли иметь место каждое из следующих равенств:

а) $2^{\cos x}=5$; б) $2^{\operatorname{tg} x}=-1$.

3) Найти область определения каждой функции:

а) $y=2^{\sin x}$; б) $y=2^{\operatorname{ctg} x}$.

269. 1. Доказать, что

а) $|5\cos x|\leqslant 5$; б) $|3\sin x|\leqslant 3$; в) $|5\cos x+2\sin x|<7$;

г) $|3\sin 2x|\leqslant 3$; д) $\left|4\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 4$.

При каких значениях аргумента x имеет место знак равенства?

Выразить формулой соответствующее множество всех значений аргумента x и отметить их на числовой оси.

2. Доказать, что при всех значениях аргумента x выполняются следующие неравенства:

а) $5\sin x+2\cos x+1<8$; б) $5\cos x+2\sin x-1<6$;

в) $|\cos x+3\sin x|<4$; г) $|3\cos x-2\sin x|<5$.

270. Является ли данная функция ограниченной:

1) $y=2\cos^2 x-\cos x+3$; 2) $y=5\sin^2 x+2\sin x-3$;

3) $y=3\cos^2 x-3\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x$;

4) $y=2\sin^2 x+3\cos^2 x-4\sin x\cdot\cos x$.

271. Какие функции являются ограниченными и какие неограниченными:

1. а) $1+\cos x$; б) $1+\operatorname{tg} x$; в) $2\cos x-5$; г) $2-\operatorname{ctg} x$;
д) $x+\sin x$; е) $x+\operatorname{tg} x$; ж) $|x\cos x|$; з) $\sin x+\operatorname{tg} x$;

2. а) $1+\sin 2x$; б) $1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $2\cos 3x+5$; г) $2-\operatorname{ctg} 3x$;

д) $3x-\cos\frac{x}{2}$; е) $5x-\operatorname{tg} 2x$; ж) $x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

з) $\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$.

272. 1. Какие из функций являются ограниченными и какие неограниченными в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$:

а) $3-\sin 3x$; б) $\cos\frac{x}{2}-1$; в) $3\cos^2 x+1$;

г) $3x-\operatorname{tg} x$; д) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; е) $\cos x+\operatorname{ctg} x$.

2. а) Являются ли ограниченными функции:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x-1};\ \frac{1}{\operatorname{tg} x+1};\ \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1}.$$

б) Каково наибольшее значение каждой функции:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1};\ \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 2x+1};\ \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}+2}.$$

Чётность и нечётность.

273. Определить, какие функции являются чётными, нечётными и какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1. а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $\sin^3 x$; д) $\sin x+\cos x$; е) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; ж) $\frac{2\sin x}{1+\cos x}$; з) $1-\sin x$; и) $x^2+\sin^2 x$; к) $\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; л) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} 2x+\sin 2x}$; м) $\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$; н) $\sin x\cdot\cos x$; о) $|\sin x|$; п) $\frac{\sin x}{x}$; р) $\sin\frac{x}{2}$; с) $\frac{1}{\cos x}$; т) $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$.

2. а) $x\sin x$; б) $x\cos x$; в) $x^2\operatorname{tg} x$; г) $x^3\operatorname{ctg} x$; д) $|1+\cos x|$; е) $\sqrt{\sin x}$; ж) $\sqrt{\cos x}$; з) $3^{\sin x}$; и) $2^{\cos x}$; к) $2^{\operatorname{tg} x}$; л) $\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$; м) $\sin 3x\cdot\cos x$.

Промежутки знакопостоянства.

274. В промежутке $[-\pi;\ \pi]$ выделить промежутки, в которых следующие функции:

1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\cos 2x$; 5) $\sin\frac{x}{2}$; 6) $\operatorname{tg} 3x$ принимают положительные (отрицательные) значения.

275. Указать промежутки, для которых справедливы неравенства:

1. а) $\cos x>0$; б) $\cos 2x>0$; в) $\cos\frac{x}{2}<0$; г) $\cos 3x<0$; д) $\sin 2x<0$; е) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$; ж) $\sin\frac{x}{2}>0$; з) $\sin(3x+1)>0$; и) $\operatorname{tg} x>0$; к) $\operatorname{tg} 5x<0$; л) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)>0$; м) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<0$.

2. а) $\cos(-2x)<0$; б) $\cos\left(-\frac{x}{2}\right)>0$; в) $\sin(-2x)>0$; г) $\sin(-3x)<0$; д) $\operatorname{tg}(-2x)>0$; е) $\operatorname{tg}(-3x)<0$.

276. Решить следующие неравенства:

1) $\cos x + 2 > 0$; 2) $\cos^2 x + 2\cos x > 0$; 3) $\cos^2 x - 3\cos x < 0$;

4) $\sin x - 4 > 0$; 5) $\sin 2x + 2 > 0$; 6) $\sin \frac{x}{2} - 3 < 0$;

7) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$.

Периодичность.

277. Определить наименьшие положительные периоды функций:

1. а) $2\sin x$; б) $\frac{\sin x}{2}$; в) $3\cos x$; г) $\frac{\cos x}{3}$;

д) $2\operatorname{tg} x + 1$; е) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$; ж) $2\operatorname{ctg} x - 1$; з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

2. а) $\sin 2x$; б) $\sin \frac{x}{2}$; в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

д) $\cos 4x$; е) $\cos \frac{x}{3}$; ж) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; з) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

и) $\sin^3 x$; к) $\cos^3 x$; л) $\frac{1}{\sin x}$.

3. а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$; в) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; е) $\operatorname{ctg} 4x$; ж) $\sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$; з) $\cos^2 x$; и) $\frac{1}{\cos x}$.

4. а) $\sin^2 x$; б) $\sin x \cdot \cos x$; в) $\sin(4\pi x + 2)$; г) $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$;

д) $|\sin x|$; е) $|\cos x|$; ж) $|\sin 2x|$; з) $|\operatorname{tg} 3x|$.

278. Определить наименьшие положительные периоды функций:

1. а) $\cos \frac{x}{2}$; б) $\cos 2x$; в) $\cos 3x$; г) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; д) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2. а) $\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$; б) $2\sin 2x$; в) $\sin 3x$; г) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

д) $3\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. а) $2|\cos x|$; б) $\frac{1}{2}|\sin x|$; в) $|\cos 2x|$; г) $|\cos \frac{x}{2}|$; д) $|\operatorname{tg} 2x|$.

279. Какие из следующих функций являются периодическими:

1) $2^{\cos x}$; 2) $3^{\sin x}$; 3) $\lg \sin x$; 4) $x + \sin x$; 5) $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

280. Вычислить:

1) $\sin 1560°$; 2) $\cos 2730°$; 3) $\operatorname{tg} 1740°$; 4) $\operatorname{ctg} 25$; 5) $\cos 12$.

281. Вычислить:

1) $\sin 2023° + 2\cos 485° + \sin 2383° - \cos 125°$;

2) $\dfrac{2\sin 3281° - \sin 1481°}{2\operatorname{tg} 585°}$; 3) $\dfrac{2\sin(-3827°) - \sin 1215°}{\cos(-1243°)}$;

4) $\operatorname{tg} 190° \cdot \operatorname{tg} 700° \cdot \operatorname{tg} 400° \cdot \operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 250° \cdot \operatorname{tg} 260°$;

5) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$ при $\alpha = 378°30'$; $\beta = 275°$.

282. Доказать тождества:

1) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \dfrac{5}{2}\pi\right) \cdot \sin(3\pi + \alpha) = 0.$

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + \alpha\right) \cdot \cos(\alpha + 3\pi)}{\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\dfrac{7}{2}\pi - \alpha\right)} = \operatorname{tg}\alpha.$

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}(5{,}5\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(3 - 4\pi)}{\operatorname{ctg}(\alpha - 6\pi) - \operatorname{tg}(3 - 3{,}5\pi)} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta.$

4) $\dfrac{\cos^2(7\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}\left(3\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha.$

283. Упростить выражения:

1) $\sin^2(4\pi - \alpha) + \sin^2(4{,}5\pi + \alpha)$;
2) $\sin(5{,}5\pi + \alpha) - \cos^2(5\pi - \alpha) + 1$;
3) $\sin^2(5\pi + \alpha) + 2\sin(2{,}5\pi + \alpha) \cdot \cos(3{,}5\pi - \alpha) - 3\cos^2(4\pi - \alpha)$;
4) $1 + \cos(7\pi + \alpha) + \cos(2\alpha - 4\pi)$.

284. Решить уравнения:

1) $\operatorname{ctg}^2(5{,}5\pi + x) = 2\operatorname{tg}(5\pi + x)$;
2) $\sin^2(7\pi + x) + 2\sin(4\pi + x) \cdot \cos(x - 8\pi) = 3\cos^2(7\pi - x)$.

285. Сила I переменного электрического тока в момент времени t определяется по формуле $I = A\sin(\omega t)$ ампер.

A — наибольшая сила тока в амперах; t — время в секундах; ω — частота колебания. Вычислить силу тока в момент времени $t = 0{,}375$ секунды, если $A = 200$ ампер и $\omega = 100\pi$.

Промежутки монотонности.

286. В каждом случае установить, что больше, и поставить соответствующий знак неравенства:

1) а) $\cos 20°$ и $\cos 22°$; б) $\cos 103°$ и $\cos 110°$; в) $\cos 201°$ и $\cos 210°$; г) $\cos 310°$ и $\cos 320°$.

2) а) $\sin 40°$ и $\sin 42°$; б) $\sin 130°$ и $\sin 135°$; в) $\sin 230°$ и $\sin 233°$; г) $\sin 300°$ и $\sin 305°$.

3) а) tg 50° и tg 53°; б) tg 140° и tg 142°; в) tg 260° и tg 261°; г) tg 340° и tg 344°.

4) а) ctg 25° и ctg 28°; б) ctg 142° и ctg 148°; в) ctg 190° и ctg 195°; г) ctg 290° и ctg 301°.

287. Не пользуясь таблицами, установить знак каждого выражения:

1) а) cos 40° — cos 41°; б) sin 40° — sin 43°; в) tg 20° — tg 21°; г) cos 20° — cos 100°; д) sin 35° — sin 36°; е) tg 35° — tg 130°.
2) а) sin 20° — cos 20°; б) sin 50° — cos 50°; в) tg 40° — ctg 40°; г) ctg 50° — tg 50°.

288. 1) Что больше:

а) arc cos (—0,6542) или arc cos 0,6542;
б) arc cos 0,4713 или arc cos 0,5172;
в) arc sin 0,3412 или arc sin 0,2975;
г) arc sin (—0,82) или arc sin (—0,62);
д) arc tg 2,345 или arc tg 3,461;
е) arc tg (—1,743) или arc tg (—1,852).

2) Что больше:

а) arc cos 0,3815 или arc sin 0,3815;
б) arc sin (— 0,7842) или arc cos (—0,7842);
в) arc sin 0,4571 или arc cos 0,2531;
г) arc ctg (—0,3752) или arc ctg (—0,4681);
д) arc ctg 2,83 или arc tg 3,71;
е) arc tg 1,935 или arc ctg 2,147.

3) Что больше: а) cos 1 или cos 1°?

б) sin π или sin 180°? в) cos 3 или cos 5,3?

4) Какой знак имеет sin 2? sin 3? tg 1,347? tg 15,2?

289. В каждом случае установить, что больше, и поставить соответствующий знак неравенства:

1) а) sin 0,6 π и sin 0,62 π; б) cos 1,3 и cos 1,4; в) tg 7,2 и tg 7,25; г) ctg 1,4π и ctg 1,5 π.

2) а) sin (— 2) и sin (— 2,1); б) cos (— 5,1) и cos (— 5);

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9}{25}\pi\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{25}\pi\right)$; г) ctg (— 6,3) и ctg (— 6,2).

290. 1) Определить промежутки монотонности функций:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin 2x$; в) $y=\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\cos 2x$; д) $\sin\frac{x}{2}$.

2) Указать промежутки, в которых справедливы неравенства:

а) $\cos x>\frac{1}{2}$; б) $|\cos x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $|\sin x|>\frac{1}{2}$;

д) $\cos 3x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $|\cos 2x| < \frac{1}{2}$; ж) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; з) $\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| < 1$.

3) Указать промежутки монотонности функций:

а) $\frac{1}{\sin x}$; б) $\frac{1}{\cos x}$; в) $|\cos x|$; г) $|\sin x|$; д) $|\operatorname{tg} x|$;

е) $\sin 3x$; ж) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; з) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; и) $\sin(2x + 1)$.

4) Указать промежутки монотонности функций:

а) $2^{\sin x}$; б) $2^{\cos x}$; в) $\lg \cos x$; г) $\lg \operatorname{tg} x$; д) $\sin^2 x$;

е) $\cos^3 x$; ж) $3^{\cos 2x}$; з) $2^{\cos^2 \frac{x}{2}}$; и) $\lg \sin 2x$; к) $\sqrt{\sin x}$.

291. Разбить сегмент $[0; 4\pi]$ на промежутки монотонности функций:

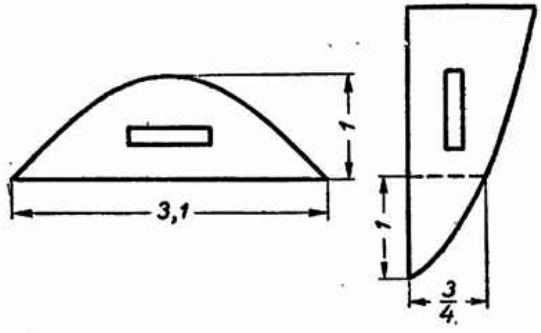
1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\sin 2x$; 5) $\cos 2x$;

6) $\operatorname{tg} 2x$; 7) $\sin \frac{x}{2}$; 8) $\cos \frac{x}{2}$; 9) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

Указать для каждой функции промежутки знакопостоянства.

§ 13. Графики тригонометрических функций.

292. 1) Построить график функции $y = \sin x$ и указать, как при построении графика использованы изученные свойства функции синуса (область определения, промежутки монотонности, нечётность функции, периодичность, интервалы знакопостоянства).



Черт. 10

2) То же для функции $y = \cos x$.
3) То же для функции $y = \operatorname{tg} x$.
4) То же для функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Приготовить из картона или фанеры лекала для построения синусоиды и тангенсоиды (черт. 10).

293. Построить графики функций:

1) а) $y = 2\sin x$; б) $y = \frac{1}{3}\sin x$; в) $y = \sin x + 1$; г) $y = |\sin x|$;

д) $y = -\sin x$; е) $y = \sin(-x)$.

2) а) $y = 3\cos x$; б) $y = \frac{1}{2}\cos x$; в) $y = 1 - \cos x$; г) $y = |\cos x|$;

д) $y = -\cos x$; е) $y = \cos(-x)$.

3) а) $y = 3\operatorname{tg} x$; б) $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x$; в) $y = \operatorname{tg} x - 1$; г) $y = |\operatorname{tg} x|$;

д) $y = -\operatorname{ctg} x$; е) $y = \operatorname{tg}(-x)$.

294. Построить графики функций и показать промежутки монотонности, интервалы знакопостоянства; определить по графику наименьший положительный период:

1) а) $y = \sin 2x$; б) $y = \sin\frac{x}{2}$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y = \sin(2x + \pi)$; е) $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$; з) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

2) а) $y = \cos 2x$; б) $y = \cos\frac{x}{3}$; в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

г) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$; д) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

е) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

3) а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$;

г) $y = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4) а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;
г) $y = \sin x + \sin 2x$.

295. Решить графически следующие тригонометрические уравнения:

1) $\cos x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos x = x$; 3) $\sin x = x$; 4) $\sin x = |x|$;

5) $\cos x + x = 0$.

296. По окружности радиуса 10 *см* равномерно движется точка A в положительном направлении и совершает полный оборот в 0,1 секунды. Найти координаты точки A через 0,09 секунды после начала её движения из точки A_0 (10; 0), если начало координат совпадает с центром окружности.

297. По окружности радиуса R движется равномерно точка M в положительном направлении и совершает полный оборот в T секунд. Определить координаты точки M через t секунд после

начала движения, если начало координат совпадает с центром окружности и начальное положение M_0 точки M имеет координаты $(R; 0)$.

298. Постройте графики функций из упражнения 273 [1. а)—з)].

299. 1) Имеют ли оси симметрии графики функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$?

2) Что является центром симметрии графиков функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$?

3) Указать центры симметрии графиков функций $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$.

§ 14. Упражнения для повторения.

300. Привести к более простому виду выражения:

1) $\cos(36^\circ + \alpha)\cdot\cos(54^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha)\cdot\sin(54^\circ - \alpha)$;

2) $\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$; 3) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$;

4) $\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\beta$;

5) $\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 6) $\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

7) $\dfrac{0{,}125\cdot\sin 2\alpha - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{0{,}125\cdot\sin 2\alpha + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

8) $\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha+\varphi) - 2\cos\alpha\cdot\cos\varphi\cdot\cos(\alpha+\varphi)$;

9) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}$;

10) $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\times$
$\times(-1+\sin\alpha+\cos\alpha)$;

11) $\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$; 12) $\cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha-\beta)$;

13) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$; 14) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha - \sin\alpha$;

15) $\dfrac{\operatorname{tg}+1}{\sin x - \cos x}$; 16) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$;

17) $\sin 3\alpha\cdot\sin^3\alpha + \cos 3\alpha\cdot\cos^3\alpha$;

18) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

301. Доказать тождества:

1) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$;

2) $\dfrac{\sin(2a+b)}{\sin a} - 2\cos(a+b) = \dfrac{\sin b}{\sin a}$;

3) $8\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sqrt{3}$;

4) $1 - \sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \cos 2a \cdot \cos 2b$;

5) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos^2(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha-\beta)$;

6) $2\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + 2\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta - 1 = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$;

7) $4\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$;

8) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$;

9) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

10) $4\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{13\pi}{10} = -1$; 11) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha - 4 + 4\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$;

12) $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ$;

13) $\cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{1}{2}\sin 40^\circ$;

14) $\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 10^\circ$; 15) $\sin^4\frac{3}{8}\pi - \cos^4\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

16) $\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$.

302. 1) Доказать, что при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

2) Доказать, что если $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$ и обосновать, что $\alpha + \beta \neq 2\pi k$.

303. При каких значениях α и β справедливы равенства:

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$;

2) $\sin\alpha = |\sin\alpha|$; 3) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$.

304. Исследовать функции:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

305. Хорда a, проведённая из конца диаметра круга, образует с диаметром угол α. Через другой конец хорды проведена касательная к кругу и продолжена до пересечения с диаметром. Определить отрезок касательной от точки касания до общей точки её с продолжением диаметра.

306. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность. Периметр треугольника, полученного соединением точек касания, равен p. Определить периметр данного треугольника.

307. В круговой сектор радиуса R с центральным углом α вписан круг. Определить радиус круга.

308. Расстояние между центрами двух внутренне касающихся окружностей равно d. Касательная, проведённая к мень-

шей окружности из центра большей составляет с линией центров угол α. Определить радиус большей окружности.

309. Диагональ трапеции, вписанной в круг радиуса R, образует с её боковыми сторонами углы α и 2α. Определить площадь трапеции.

310. Определить длину наименьшей диагонали правильного n-угольника, сторона которого равна a.

311. К окружности радиуса R из одной и той же внешней точки проведены две касательные, образующие между собой угол φ. Определить площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и меньшей дугой окружности, заключённой между точками касания.

312*. В данный угол α вписан круг радиуса R. Определить радиус такого круга, который, касаясь внешним образом данного круга, касается в то же время сторон данного угла (два случая).

313. Острый угол ромба равен α. Определить площадь ромба, если площадь вписанного в него круга K *кв. ед.*

314. В круг вписан правильный n-угольник, сторона которого равна a. Определить сторону правильного вписанного $2n$-угольника.

315*. В сегмент вписан квадрат; две его вершины, лежащие на дуге, делят дугу на три равные части. Определить дугу сегмента.

316. Две окружности пересекаются, отсекая друг от друга дуги 2α и 2β. (2α — дуга большей окружности.) Определить угол между общими внешними касательными.

317. Около правильного n-угольника со стороной a описана окружность, и в него вписана другая окружность. Найти площадь образовавшегося кольца.

318. В равнобедренном треугольнике высота равна h, а высота, опущенная на боковую сторону, равна h_1. Определить угол при основании треугольника.

319. Перпендикуляр, опущенный из середины основания равнобедренной трапеции на боковую сторону, равен h и делит боковую сторону пополам; тупой угол трапеции равен α. Найти площадь трапеции.

320. К плоскости восставлен перпендикуляр длиной p; из основания его, как из центра, описана в плоскости окружность радиуса r. Определить угол между перпендикуляром и наклонной, соединяющей вершину перпендикуляра с любой точкой окружности ($p = 4{,}5$; $r = 8$).

321. Через центр O квадрата, сторона которого $AB = a$, проведён перпендикуляр к плоскости квадрата; на нём взят отрезок

---

* Задачи, отмеченные звёздочкой, могут быть использованы для индивидуальных и для внеклассных занятий учащихся.

$OM = d$, а из M на AB опущен перпендикуляр MC. Вычислить угол между MC и его проекцией на плоскость квадрата.

322. Ребро куба $a = 10$ *см*. Вычислить угол, под которым диагональ куба наклонена к его грани. Изменится ли этот угол, если изменить длину ребра куба?

323. В основании четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 8 *см*. Высота пирамиды, равная 7 *см*, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Под каким углом боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости её основания?

324. Из центра O правильного треугольника ABC, сторона которого равна a, восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника, на нём взята точка M так, что отрезок $MA = a$; из M на AC опущен перпендикуляр MD. Вычислить угол между MD и плоскостью треугольника ABC.

325. Концы отрезка $AB = a$ удалены от данной плоскости на m и n. Определить угол, который отрезок составляет с плоскостью, и вычислить этот угол, если $a = 13$ *см*, $m = 5$ *см* и $n = 8$ *см*. (Рассмотрите два случая.)

326. Дан двугранный угол α. Из точки, лежащей на одной грани этого угла на расстоянии a от ребра, восставлен перпендикуляр до пересечения с другой гранью. Определить длину этого перпендикуляра ($a = 6{,}06$; $\alpha = 41°50'$).

327. Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что гипотенуза его AB лежит в плоскости P, а катеты образуют с плоскостью P углы α и β. Определить угол между плоскостью треугольника и плоскостью P.

328. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол α. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол φ с плоскостью треугольника.

329. Одна сторона (AB) треугольника ABC лежит на плоскости P. Две другие стороны (CA и CB) составляют с плоскостью углы α и β, тангенсы которых соответственно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, а проекции этих сторон на плоскость P взаимно перпендикулярны. Определить угол наклона плоскости треугольника ABC к плоскости P.

330. Параллелограмм и плоскость P расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится в плоскости P, а противоположная ей удалена от плоскости P на расстояние, равное расстоянию между большими сторонами параллелограмма. Определить угол между плоскостью P и плоскостью параллелограмма, если стороны параллелограмма относятся, как 3 : 5.

331. Наклонная образует с плоскостью угол α; через вершину этого угла проведена в данной плоскости прямая под углом β к проекции наклонной на плоскость. Определить угол между наклонной и прямой в плоскости.

332*. Прямая, находящаяся вне плоскости, пересекаясь с прямой, лежащей в плоскости, образует с этой прямой угол α, а эта последняя образует угол β с проекцией первой прямой на плоскость. Определить угол первой прямой с плоскостью ($\alpha = 8°20'$; $\beta = 5°40'$).

333. Из двух точек плоскости, удалённых друг от друга на расстояние a, проведены две параллельные наклонные под углом φ к плоскости. Определить расстояние между ними, если расстояние между их проекциями на плоскость равно b.

334. Отрезок AB параллелен плоскости. Из его концов проведены к плоскости две наклонные: $AC = c$ и $BD = d$. Наклонная AC составляет с плоскостью угол α. Определить угол наклона BD к этой плоскости.

335. Через концы трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая угол α с плоскостью основания. Смежные стороны основания имеют длины a и b. Определить площадь получившегося сечения.

ГЛАВА V.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 15. Натуральные таблицы и таблицы логарифмов тригонометрических функций.

336. 1) Найти:

а) $\sin 17°23'$; б) $\cos 28°31'$; в) $\cos \frac{\pi}{8}$; г) $\cos(-1{,}2538)$;

д) $\sin\left(-\frac{2\pi}{17}\right)$; е) $\sin 2{,}1730$; ж) $\operatorname{tg}(-70°41')$; з) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11}$;

и) $\operatorname{tg} 3{,}017$; к) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}$; л) $\operatorname{ctg} 42°55'$; м) $\operatorname{ctg} 0{,}2613$.

2) Найти:

а) $\arcsin(-0{,}1217)$; б) $\arcsin 0{,}5670$; в) $\arccos\frac{\pi}{12}$;

г) $\arccos(-0{,}7328)$; д) $\operatorname{arctg} 10{,}35$; е) $\operatorname{arctg}(-12{,}31)$;
ж) $\operatorname{arcctg} 2{,}175$; з) $\operatorname{arcctg} 0{,}6830$.

3) Найти наименьшее положительное значение α, если:
а) $\sin\alpha = -0{,}7236$; б) $\cos\alpha = 0{,}3892$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7524$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}340$.

4) Найти наиболее рациональным способом значения следующих выражений:

а) $\sin 42° \cdot \cos 12°$; б) $\cos 38° \cdot \cos 52°$; в) $\sin 82° \cdot \sin 66°$;
г) $\sin 27°40' \cdot \cos 70°48'$; д) $\cos 48°14' \cdot \cos 82°16'$;
е) $\sin 72°26' \cdot \sin 17°34'$; ж) $\sin 0{,}2347 \cdot \cos 1{,}2459$;
з) $\sin 1{,}3841 \cdot \sin 2{,}1176$.

5) То же:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ при $\alpha = 12°51'$; б) $\frac{\cos 3x}{\cos x}$ при $x = 55°11'$;

в) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$ при $\alpha = 0{,}0124$; г) $1{,}763 \cos^2 18°16'$;

д) $2{,}537 \cos^2 65°38'$; е) $x + \sin x$ при $x = 2{,}5$;

ж) $x + \cos\frac{1}{x}$ при $x = \pi$; з) $x + \cos x$ при $x = 1{,}295$;

и) $\cos^2\alpha\,(1 + \cos\alpha) \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$ при $\alpha = 126°18'$.

337. Найти по таблицам:

1) а) $\lg\cos 21°37'$; б) $\lg\cos 63°42'$; в) $\lg\cos 21°11'$;
г) $\lg\cos 47°12'$; д) $\lg\cos 53°15'$; е) $\lg\cos 1°23'$.
2) а) $\lg\sin 12°8'$; б) $\lg\sin 50°22'$; в) $\lg\sin 44°53'$;
г) $\lg\sin 62°47'$; д) $\lg\sin 30°46'$; е) $\lg\sin 88°34'$.
3) а) $\lg\operatorname{tg} 27°41'$; б) $\lg\operatorname{tg} 16°7'$; в) $\lg\operatorname{tg} 70°43'$;
г) $\lg\operatorname{tg} 12°15'$; д) $\lg\operatorname{tg} 84°19'$; е) $\lg\operatorname{tg} 89°10'$.
4) а) $\lg\operatorname{ctg} 80°53'$; б) $\lg\operatorname{ctg} 20°26'$; в) $\lg\operatorname{ctg} 77°21'$;
г) $\lg\operatorname{ctg} 15°38'$; д) $\lg\operatorname{ctg} 87°59'$; е) $\lg\operatorname{ctg} 15°40'$.

Найти (положительный) острый угол x, если

5) $\lg\cos x$ равен: $\bar{1}{,}4001$; $\bar{1}{,}4634$; $\bar{1}{,}6747$; $\bar{1}{,}9341$; $\bar{1}{,}2711$.

6) $\lg\sin x$ равен: $\bar{1}{,}8615$; $\bar{2}{,}9301$; $\bar{1}{,}9497$; $\bar{1}{,}3494$; $\bar{1}{,}5080$.

7) $\lg\operatorname{tg} x$ равен: $\bar{2}{,}7865$; $0{,}0066$; $\bar{1}{,}4608$; $0{,}0771$; $0{,}0002$.

8) $\lg\operatorname{ctg} x$ равен: $1{,}0368$; $\bar{1}{,}5018$; $0{,}3738$; $\bar{1}{,}3387$; $\bar{1}{,}2435$.

338. Решить каждое из данных простейших тригонометрических уравнений: а) найти главное значение угла x и б) выписать формулу множества всех решений:

1) $\sin x = 0{,}681$; 2) $\sin x = \frac{5}{11}$; 3) $\sin x = -0{,}3721$;

4) $\operatorname{tg} x = \frac{17}{35}$; 5) $\operatorname{tg} x = 1{,}45$; 6) $\operatorname{tg} x = -2{,}48$;

7) $\cos x = 0{,}7621$; 8) $\cos x = -0{,}5688$; 9) $\operatorname{ctg} x = 3$;
10) $\operatorname{ctg} x = -0{,}731$.

339. Определить главное значение x из условий (использовать таблицы натуральных значений и логарифмов тригонометрических функций):

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 70°$; 2) $\cos x = 1 - \operatorname{ctg} 66°12'$;
3) $\cos x = 1 + \operatorname{tg} 117°$; 4) $\operatorname{tg} x = \sin 44° + \cos 166°$.

340. Вычислить наиболее рациональным способом значения выражений:

1) $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$, если $a = 7{,}386$; $b = 5{,}214$; $\alpha = 42°26'$; $\beta = 68°34'$;

2) $a^2 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \sqrt[4]{-\operatorname{tg} 2\alpha}$ при $a = 0{,}0204$; $\alpha = 67°34'$;

3) $x = \pi \cdot (\sin 30°53' + \sin 80°24')$; 4) $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}0001}}{\cos 16° - \sin 49°}$;

5) $x = \sqrt{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} 61°30')$; 6) $x = \left(16\frac{76}{81}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11°7')$;

7) $x = \sqrt[4]{0{,}005} \cdot (1 + 2\sin 41°)$; 8) $x = (2{,}715)^3 \cdot \sqrt{3 - 4\cos^2 72°5'}$.

§ 16. Решение прямоугольных треугольников.

341. Решить прямоугольные треугольники по данным основным элементам. Решение каждого примера следует выполнять при помощи таблиц логарифмов и логарифмической линейки.

1) Даны гипотенуза и острый угол:

а) $c \approx 9{,}35$; $A \approx 65°10'$. б) $c \approx 0{,}7979$; $A \approx 66°35'$.
в) $c \approx 3{,}643$; $A \approx 50°10'$.

2) Даны катет и острый угол:

а) $a \approx 6{,}37$; $A \approx 4°20'$. б) $b \approx 0{,}1738$; $A \approx 35°55'$.
в) $b \approx 0{,}2954$; $B \approx 25°37'$.

3) Даны гипотенуза и катет:

а) $c \approx 697$; $a \approx 528$. б) $c \approx 113$; $b \approx 15$.
в) $c \approx 1710$; $b \approx 823$.

4) Даны катеты:

а) $a \approx 261$; $b \approx 380$. б) $a \approx 0{,}0978$; $b \approx 0{,}1003$.
в) $a \approx 12{,}01$; $b \approx 6{,}92$.

342. Решить равнобедренный треугольник по данным его элементам.

Обозначения: $a = c$ — боковая сторона; b — основание; $A = C$ — углы при основании; B — угол при вершине; h_a — высота, опущенная на сторону a; S — площадь треугольника.

1) $a \approx 797{,}9$;	$A \approx 66°35'$.	4) $A \approx 65°$;	$h_a \approx 20$,
2) $a \approx 8{,}76$;	$b \approx 13{,}96$.	5) $a \approx 627$;	$B \approx 133°$,
3) $B \approx 73°14'$;	$S \approx 4504$.	6) $b \approx 925{,}2$;	$h_b \approx 721{,}4$.

§ 17. Решение косоугольных треугольников.

Обозначения: a, b и c — стороны треугольника; A, B и C — противолежащие им углы; S — площадь; $2p$ — периметр; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; h_a, l_a и m_a — высота, биссектриса и медиана, соответствующие стороне a.

343. Доказать, что тригонометрические функции углов косоугольного треугольника удовлетворяют следующим соотношениям:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$.

Указание. Воспользоваться формулами для преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

2) $4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B - \sin C$.

Указание. Воспользоваться формулами для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

4) $4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - 1 = \cos A + \cos B - \cos C$.

5) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$.

6) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

7) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

8) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

9) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

10) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

11) Доказать, что если имеет место равенство

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$, где $\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ — острые углы, то $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

12) Доказать, что если имеет место равенство

$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 1$, где α, β, γ — острые углы, то $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

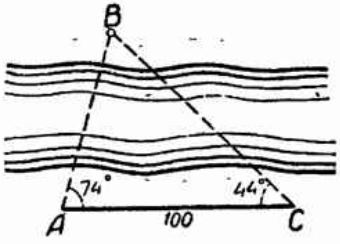
Теорема синусов.

344. 1) Чтобы определить расстояние между двумя пунктами A и B, расположенными на разных берегах реки (черт. 11), выбрали произвольно пункт C, находящийся на том же берегу, что и пункт A, и произвели следующие измерения: базис $AC \approx 100$ *м*; $\angle CAB \approx 74°$ и $\angle ACB \approx 44°$.

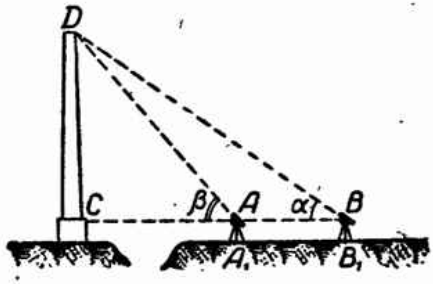
При помощи указанных данных вычислить искомое расстояние.

Определить этим способом на школьном дворе расстояние между двумя какими-либо предметами.

2) Чтобы определить высоту трубы, к основанию которой нельзя подойти, измерили базис $A_1B_1 \approx 11{,}0$ *м*, продолжение которого упирается в основание трубы (черт. 12).



Черт. 11



Черт. 12

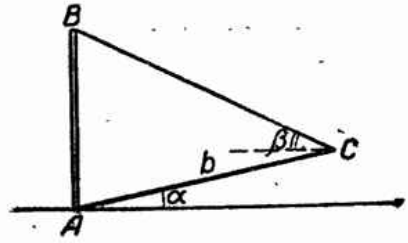
Угол $CAD = \beta \approx 49°$; угол $CBD = \alpha \approx 35°$. Высота угломерного прибора $h \approx 1{,}4$ *м*. Чему равна искомая высота трубы?

Определить этим способом высоту школьного здания.

3) Для определения высоты вертикального предмета AB от основания его A проведён базис AC, равный b и повышающийся от A к C под углом α к плоскости горизонта.

Из конца C базиса верх предмета виден под углом высоты β. Определить высоту предмета (черт. 13).

4) На горе, склон которой понижается к горизонту под углом β, стоит дерево. Тень дерева, падающая вниз по склону горы при высоте солнца α ($\alpha > \beta$), имеет длину l. Определить высоту дерева (черт. 14).



Черт. 13

5) Чтобы определить ширину реки, непосредственно у воды по берегу реки провели базис AB длиной c метров и наметили дерево C, стоящее на другом берегу у самой воды; затем измерили $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

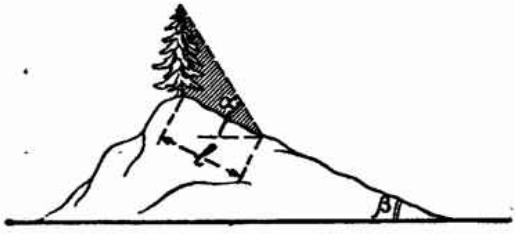
Вычислить ширину реки против дерева C, если $c \approx 400$ *м*; $\alpha \approx 45°{,}0$ и $\beta \approx 30°{,}0$ (черт. 15).

6) Сила, равная $P \approx 23{,}0$ *кГ*, разложена на две составляющие, которые образуют с её направлением углы $\alpha \approx 46°30'$ и $\beta \approx 54°10'$. Вычислить величину каждой составляющей силы.

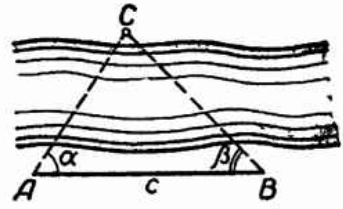
7) Около треугольника описан круг. Найти отношение площади треугольника к площади круга.

Указание: Считать известными углы данного треугольника.

8) Доказать, что в любом треугольнике сторона, лежащая против угла в 30°, равна радиусу круга, описанного около треугольника.



Черт. 14



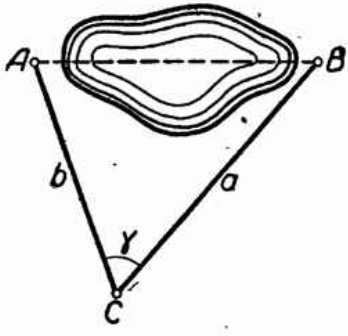
Черт. 15

Теорема косинусов

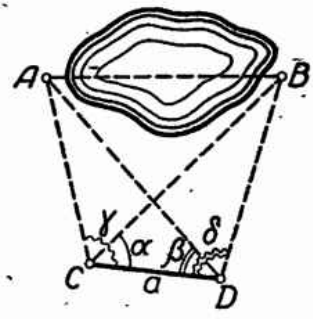
345. 1) Чтобы определить расстояние между пунктами A и B, которое непосредственно измерить нельзя, выбрали третий пункт C так, что из него видны и доступны оба пункта A и B; затем измерили расстояние $BC = a$, $AC = b$ и $\angle ACB = \gamma$. Вычислить AB ($a \approx 100$ *м*; $b \approx 80$ *м*; $\gamma \approx 48°50'$) (черт. 16).

Определить этим способом расстояние между двумя предметами на школьном дворе.

2) Смежные стороны параллелограмма равны 4,0 *см* и 5,0 *см*, угол между ними 52°. Найти диагонали параллелограмма.



Черт. 16



Черт. 17

3) Две силы: $P \approx 100$ *кГ* и $Q \approx 200$ *кГ* — приложены к материальной точке под углом $\alpha \approx 50°$ друг к другу. Определить величину равнодействующей и углы, которые она составляет с силами P и Q.

4) Для определения расстояния между двумя пунктами A и B (черт. 17) измерили длину a выбранного базиса CD и углы: $ACD = \gamma$, $BCD = \alpha$, $ADC = \beta$ и $BDC = \delta$. Найти AB.

5) Доказать, что площадь вписанного в круг четырёхугольника равна $\frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\sin\alpha$, где a, b, c и d — стороны четырёхугольника и α — угол между сторонами a и b.

6) Доказать, что площадь вписанного четырёхугольника равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр и a, b, c и d — стороны четырёхугольника.

Указание. Использовать предыдущую задачу. Найти по теореме косинусов $\cos\alpha$ и выразить $\sin\alpha$ через $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

346. Вычислить при помощи логарифмической линейки;

1) а) $3{,}5\sin 25°$; б) $8{,}3\sin 72°$, в) $1{,}2\sin 3°$.

2) а) $2{,}8\operatorname{tg}68°30'$; б) $6{,}3\operatorname{tg}29°$; в) $7{,}4\operatorname{tg}2°30'$.

3) а) $\frac{5{,}4}{\sin 14°}$; б) $\frac{7{,}3}{\sin 43°}$; в) $\frac{9{,}1}{\sin 63°}$.

4) а) $\frac{12{,}3}{\operatorname{tg}53°30'}$; б) $\frac{8{,}5}{\operatorname{tg}67°}$; в) $\frac{5{,}7}{\operatorname{tg}16°}$; г) $\frac{12{,}8}{\operatorname{tg}28°30'}$.

5) а) $4{,}7\cos 37°$; б) $7{,}2\operatorname{ctg}57°$; в) $\frac{2{,}8}{\cos 71°}$; г) $\frac{6{,}7}{\operatorname{ctg}62°}$.

6) а) $\sin 22°\cdot\sin 73°$; б) $\sin 41°\cdot\operatorname{tg}15°30'$; в) $\cos 29°\cdot\sin 41°$;
г) $\operatorname{tg}32°\cdot\operatorname{tg}53°$; д) $\operatorname{tg}62°\cdot\cos 25°$; е) $\cos 53°\cdot\cos 64°$;
ж) $\sin 4°\cdot\sin 57°$; з) $\operatorname{tg}12°\cdot\operatorname{tg}4°30'$.

7) а) $\frac{\sin 73°}{\sin 31°}$; б) $\frac{\sin 8°}{\sin 4°30'}$; в) $\frac{\sin 16°}{\sin 8°}$.

8) Вычислить площадь треугольника.

а) $a=40$, $b=50$ и $\angle C=50°$; б) $b=64$, $c=82$ и $\angle A=65°$;
в) $a=32$, $b=53$ и $\angle C=61°$; г) $a=95$, $\angle B=35°$ и $\angle C=42°$.

9) Вычислить радиус круга, описанного около треугольника если:

а) $a=28$ и $\angle A=72°$; б) $b=74$ и $\angle B=34°$.

10) Решить косоугольные треугольники, если дано:

а) $a=500$, $b=800$ и $\angle A=24°$; б) $a=800$, $\angle A=55°$ и $\angle B=47°$; в) $a=34$, $b=55$ и $\angle C=31°$; г) $a=35$, $b=58$ и $c=76$.

Решить косоугольные треугольники по заданным основным элементам. (Решение каждого примера следует выполнить при помощи таблиц логарифмов и логарифмической линейки.)

347. Даны сторона и два угла:

1) $a\approx 370{,}0$; $B\approx 86°30'$; $C\approx 50°50'$,
2) $a\approx 450{,}0$; $A\approx 87°50'$; $B\approx 10°50'$.

3) $a \approx 951$; $B \approx 126°40'$; $C \approx 13°20'$.
4) $b \approx 13{,}02$; $A \approx 11°46'$; $B \approx 133°40'$.

348. Даны две стороны и угол между ними:

1) $a \approx 510$; $b \approx 317$; $C \approx 76°10'$.
2) $a \approx 225$; $b \approx 800$; $C \approx 36°40'$.
3) $a \approx 2{,}296$; $c \approx 1{,}687$; $B \approx 29°52'$.
4) $b \approx 28$; $c \approx 42$; $A \approx 124°$.

349. Даны две стороны и угол против одной из них:

1) $a \approx 87$; $b \approx 65$; $A \approx 75°$.
2) $b \approx 360$; $c \approx 309$; $C \approx 21°30'$.
3) $a \approx 13{,}89$; $c \approx 8{,}42$; $A \approx 126°41'$.
4) $a \approx 13{,}81$; $c \approx 8{,}14$; $C \approx 14°37'$.
5) $b \approx 263{,}1$; $c \approx 215{,}4$ $B \approx 70°14'$
6) $a \approx 19{,}06$; $b \approx 88{,}19$; $A \approx 31°17'$.

350. Даны три стороны:

1) $a \approx 19$; $b \approx 34$; $c \approx 49$.
2) $a \approx 0{,}099$; $b \approx 0{,}101$; $c \approx 0{,}158$.
3) $a \approx 172{,}5$; $b \approx 113{,}4$; $c \approx 120{,}5$.
4) $a \approx 1{,}234$; $b \approx 2{,}345$; $c \approx 3{,}457$.

351. Решить косоугольные треугольники по заданным элементам:

1) $R \approx 7{,}92$; $A \approx 113°17'$; $B \approx 48°16'$.
2) $S \approx 501{,}9$; $A \approx 15°28'$; $B \approx 45°23'$.
3) $h_a \approx 5{,}37$; $B \approx 115°10'$; $C \approx 5°33'$.
4) $l_a \approx 0{,}758$; $B \approx 98°30'$; $C \approx 4°20'$.
5) $a + b \approx 488{,}8$; $A \approx 70°24'$; $B \approx 40°16'$.
6) $a - b \approx 23$; $A \approx 108°$; $B \approx 18°$.
7) $r \approx 5{,}0$; $A \approx 22°$; $B \approx 39°$.
8) $S \approx 2420$; $a \approx 42{,}5$; $B \approx 124°50'$.
9) $a \approx 32$; $b \approx 25$; $A \approx 2B$.
10) $S \approx 15$; $ab \approx 48$; $\sin A \approx \cos B$.
11) $a \approx 120{,}0$; $b \approx 29{,}0$; $h_c \approx 23{,}7$.
12) $h_a \approx 8$; $h_b \approx 12$; $h_c \approx 18$.

§ 18. Применение решения треугольников.

352. 1) Вычислить площадь земельного участка, имеющего форму треугольника, если при съёмке плана этого участка с масштабом 1 : 100 000 две его стороны изображены отрезками 5,6 *см*. 7.5 *см* и угол между ними равен 48°.

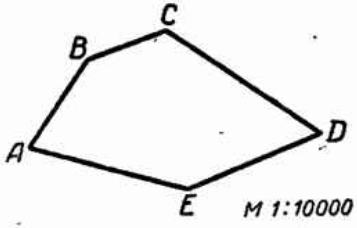
2) При съёмке плана участка полярным способом (за полюс взята вершина A многоугольника — участка) измерением были получены следующие данные: сторона $AB \approx 250$ *м*; диагонали $AC \approx 360$ *м*; $AD \approx 430$ *м*; $AE \approx 390$ *см* и сторона $AF \approx 450$ *м*; азимуты этих направлений соответственно равны $\angle NAB \approx 25°$; $\angle NAC \approx 53°$; $\angle NAD \approx 81°$; $\angle NAE \approx 125°$ и $\angle NAF \approx 140°$.

Вычислить площадь участка $ABCDEF$.

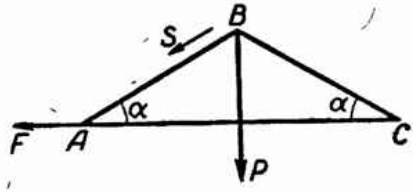
3) При съёмке плана участка $ABCD$ полярным способом (за полюс взята точка O, одна из внутренних точек участка) измерением были получены следующие данные:
$OA \approx 28$ *м*; $OB \approx 31$ *м*; $OC \approx 24$ *м*; $OD \approx 37$ *м*; $\angle AOB \approx 36°$; $\angle BOC \approx 78°$; $\angle COD \approx 110°$ и $\angle DOA \approx 136°$.

Вычертить план участка $ABCD$ и вычислить его площадь; угол NOA (азимут направления OA) $\approx 280°$.

4) Вычислить площадь участка, имеющего форму пятиугольника, изображенного на прилагаемом плане в масштабе 1 : 10 000 (черт. 18).



Черт. 18



Черт. 19

353. Сила $P \approx 5{,}2$ *кГ* должна быть разложена на две составляющие, действующие под прямым углом друг к другу, одна из которых составляет с направлением силы P угол $\alpha \approx 46°$. Вычислить составляющие силы.

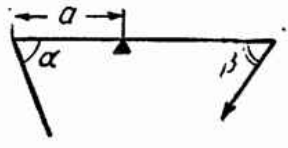
354. Стропила BA и BC (черт. 19) составляют углы α с горизонтальной балкой AC. К концу B подвешен груз P. Определить: 1) силу S, прижимающую стропильную ногу к балке AC, и 2) силу F, растягивающую балку AC.

355. Лодочник, переправляясь через реку, направлял лодку поперёк реки и грёб с такой силой, что в стоячей воде она подвигалась бы со скоростью $\approx 0{,}3 \frac{м}{сек}$. На какой угол от этого направления лодка будет отнесена течением реки, если оно составляет $\approx 1{,}0 \frac{м}{сек}$?

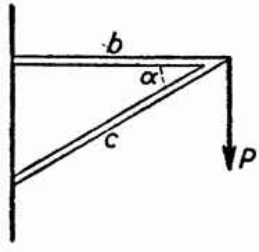
356. Поезд идёт со скоростью $\approx 12 \frac{м}{сек}$, и пассажиру из вагона кажется, что капли дождя падают под углом $\alpha \approx 30°$ к отвесному направлению. Определить среднюю скорость падения дождя.

357. Тело при свободном падении в первую секунду проходит $\approx 4{,}9$ *м*, а при скольжении с данной наклонной плоскости $\approx 1{,}8$ *м*. Вычислить угол наклона плоскости к горизонту (трение во внимание не принимать).

358. На плечо, имеющее длину *a*, прямолинейного рычага под углом α к нему действует сила *P кГ*. На другое плечо в противовес первой действует сила *Q кГ* под углом β к рычагу. Какова длина второго плеча рычага, если рычаг находится в равновесии (черт. 20)?



Черт. 20



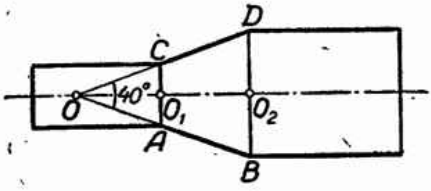
Черт. 21

359. Две силы *P кГ* и *Q кГ* действуют на концы *A* и *B* прямолинейного рычага *AB* длиной *a см*. Сила *P*, действующая на конец *A*, образует с рычагом угол α, сила *Q*, действующая на конец *B*, — угол β. На каком расстоянии от *A* нужно подпереть рычаг, чтобы он находился в равновесии (весом рычага пренебречь)?

360. К кронштейну (черт. 21) подвешен груз весом *P кГ*. Вычислить силу, растягивающую стержень *b*, и силу, сжимающую стержень *c*, если угол между *b* и *c* равен α.

361. Вычислить работу на пути ≈ 20 *м*, если сила, равная ≈ 10 *кГ*, действует на данный предмет под углом $\approx 40°$ к направлению движения.

362. Труба диаметра *CA* ≈ 100 *мм* при помощи конусообразного раструба переходит в трубу *BD* вдвое большего поперечного сечения (черт. 22). Определить длину раструба *AB*, если противоположные образующие конической поверхности пересекаются под углом 40°.

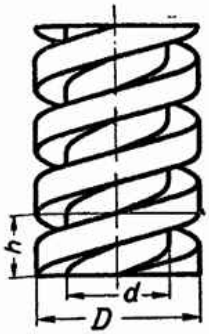


Черт. 22

Решите задачи, связанные с винтовой линией. Обозначения: *h* — шаг винта; *D* — наружный диаметр; *d* — внутренний диаметр; α — угол подъёма винтовой линии; $\frac{D+d}{2}$ — средний диаметр.

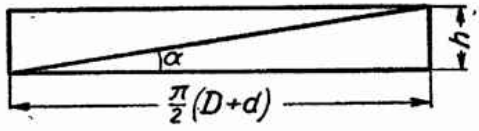
363. Составить формулу, выражающую угол винтовой линии через шаг её и диаметр цилиндра, на котором эта линия нанесена (черт. 23 и 24).

364. Определить угол подъёма винтовой линии, если внешний диаметр винтовой нарезки 50 *м*, внутренний диаметр 42 *мм* и шаг винта 6 *мм*.



Черт. 23

365. 1) Винтовая нарезка имеет 4,5 хода на дюйм (1 дюйм $\approx$ 25,4 *мм*), внешний диаметр 2,0 дюйма, внутренний 1,7 дюйма. Определить угол подъёма винтовой линии.



Черт. 24

2) Внешний диаметр винта 25,4 *мм*, внутренний 21,3 *мм*, угол подъёма 2°20′. Найти шаг винта и число ходов на дюйм.

366. Спиральное сверло диаметром 12,5 *мм* имеет спиральную канавку с шагом в 192 *мм*. Определить угол, который спиральная канавка сверла образует с его осью.

ГЛАВА VI.

ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ.

§ 19. Многогранники.

Параллелепипед и призма.

367. Углы, образуемые диагональю прямоугольного параллелепипеда с его рёбрами, исходящими из одной с ней вершины, равны α, β и γ. Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и вычислить $\angle\gamma$, если $\alpha = 31°10'$ и $\beta = 69°10'$ (преобразовать предварительно выражение для $\cos^2\gamma$ в произведение).

368. Даны в пространстве три взаимно перпендикулярных луча, выходящих из одной точки, и вектор, исходящий из этой же точки. Доказать, что если вектор составляет с лучами углы α, β и γ, то справедливо соотношение: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Справедливо ли это соотношение, если направление вектора совпадает с направлением одного из трёх данных лучей?

369. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с тремя его неравными гранями углы α, β и γ.

Доказать:

1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$; 2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

370. 1) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда $a = 36$ *см* и $b = 15$ *см*. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $\alpha = 38°$. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда и его объём.

2) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной $a = 58$ *см* и острым углом $\alpha = 63°$. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол $\beta = 52°$. Определить объём параллелепипеда.

371. Определить объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β. Исследовать полученную формулу решения*.

372. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания d, угол между диагоналями основания α, а угол, образуемый диагональной плоскостью, проведенной через большую сторону основания, с плоскостью основания, β. Определить объём параллелепипеда. (Вычислить при $d = 7{,}5$; $\alpha = 43°$ и $\beta = 57°$.)

373. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 *см*. У одной из вершин параллелепипеда, в гранях его, три угла острых, по 2α каждый. Определить объём параллелепипеда. Исследовать полученную формулу решения.

374. В параллелепипеде длины трёх рёбер, выходящих из одной вершины, a, b и c; рёбра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объём параллелепипеда и угол между ребром c и плоскостью основания.

375. Высота правильной четырёхугольной призмы равна h. Из одной вершины основания проведены в двух смежных боковых гранях две диагонали, угол между которыми равен α. Определить площадь боковой поверхности призмы. Исследовать полученную формулу решения.

376. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырёхугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, образующим угол $\alpha = 58°$. Сторона основания призмы $a = 6{,}4$ *см*. Определить объём призмы (вычисления произвести при помощи таблиц и логарифмической линейки; результаты сравнить).

377. В правильной треугольной призме сторона основания равна a. Две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основания. Определить объём призмы, если угол между проведёнными прямыми,

---

* В этой и во всех последующих задачах под исследованием формулы решения подразумевается исследование, вытекающее из условия задачи: определить множество всех допустимых значений параметров, т. е. выяснить, при каких условиях существуют фигуры, рассматриваемые в задаче.

обращённый к плоскости основания, равен α. Исследовать полученное решение.

378. 1) Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, у которого сторона $AC = b$, сторона $BC = a$, угол $ACB = \alpha$. Боковое ребро призмы равно высоте треугольника ABC, проведённой из вершины C. Определить объём призмы.

2) Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, в котором угол между равными сторонами a равен α. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней; угол между ними равен β. Найти площадь боковой поверхности призмы. Исследовать формулу решения.

(Вычислить при $a = 97{,}84$ *см*, $\alpha = 63°28'$ и $\beta = 39°36'$).

379. Основанием призмы служит $\triangle ABC$, в котором $BC = a$ и $AB = AC$. Ребро AA_1 равно b и перпендикулярно BC; двугранный угол при ребре AA_1 равен α. Определить объём и площадь боковой поверхности призмы.

380. Сторона основания правильной пятиугольной призмы a, высота призмы равна $\frac{1}{4}$ диагонали основания. Вычислить площадь поверхности призмы.

381. В треугольной призме каждая сторона основания равна a. Одна из вершин верхнего основания имеет своей проекцией центр нижнего основания. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом α. Определить площадь боковой поверхности призмы. Исследовать формулу решения.

382. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна d и наклонена к боковой грани под углом α. Определить площадь боковой поверхности призмы. Исследовать формулу решения.

383. Определить объём прямой четырёхугольной призмы, если высота её h, диагонали её наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол в пересечении диагоналей основания равен γ.

384. Плоскость, проведённая через ребро основания куба и составляющая с плоскостью основания угол α, делит куб на треугольную и четырёхугольную призмы. Определить объём каждой призмы, если ребро куба равно a. Исследовать формулу решения.

385. Высота правильной треугольной призмы равна h. Через одно из рёбер основания и противоположную ему вершину другого основания проведена плоскость. Найти площадь получившейся в сечении фигуры, если угол её при взятой вершине призмы равен 2α. Исследовать полученную формулу решения.

386*. В правильной треугольной призме через сторону основания проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Сторона основания призмы равна a. Найти площадь получившегося сечения. Исследовать полученное решение.

387. 1) В прямой четырёхугольной призме площадь основания m, площади диагональных сечений p и q, двугранный угол между ними α. Определить объём призмы.

2) Площади двух боковых граней треугольной призмы равны m и n, двугранный угол между ними равен α. Определить объём призмы, если её боковое ребро a.

388. 1) В основании прямой призмы лежит трапеция. Через противоположные основания трапеций верхнего и нижнего оснований призмы проведена плоскость под углом α к основаниям призмы. Каждая диагональ получившейся в сечении фигуры равна d, а угол между диагоналями, обращенный к основаниям, β. Определить объём призмы.

2) Высота h прямой призмы равна 20 *см*; основанием служит прямоугольная трапеция с острым углом $\alpha = 46°$, описанная около круга радиуса $r = 6$ *см*. Найти объём призмы.

389. В треугольной призме расстояния между тремя боковыми рёбрами последовательно равны a, b и c. Высота призмы H и составляет с боковым ребром призмы угол α. Найти объём призмы и площадь её боковой поверхности.

390. Основанием призмы служит правильный шестиугольник со стороной a. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α, и его проекция на эту плоскость равна радиусу окружности, описанной около основания призмы. Определить объём призмы.

391. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две боковые её грани по прямым, составляющим между собой угол α. Определить наклон этой плоскости к основанию призмы.

392. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырёхугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Определить объём призмы, если ребро её основания равно a.

393. В треугольной призме два угла основания α и β, радиус описанного около основания круга R. Каждое боковое ребро a наклонено к плоскости основания под углом φ. Определить объём призмы.

394. В правильной четырёхугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклонённая к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.

395. В правильной четырёхугольной призме проведена плоскость через середину оси и середины двух последовательных сторон основания. Зная, что сторона основания равна a, а боковое ребро b, определить: 1) площадь полученного сечения и 2) угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания.

396. 1) Если правильную четырёхугольную призму пересечь так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом α, то секущая плоскость окажется параллельной диагонали основания

и составит с плоскостью основания такой угол φ, что $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Доказать.

2) Основанием прямой четырёхугольной призмы служит ромб с острым углом α. Если её пересечь плоскостью, параллельной большей диагонали ромба, под таким углом φ к плоскости основания, чтобы в сечении получился квадрат с вершинами на боковых рёбрах призмы, то $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Доказать.

Пирамида.

397. 1) По данной модели правильной треугольной пирамиды рассчитать: угол наклона бокового ребра к плоскости основания; угол наклона боковой грани к плоскости основания; измерить транспортиром плоские углы при вершинах.

2) В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

3) В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Определить двугранный угол при боковом ребре.

4) В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α. Определить угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

398. 1*) В правильной n-угольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить двугранный угол при ребре основания.

2*) В правильной n-угольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

3) В правильной n-угольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным ребром основания равен α. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания.

399. Основанием пирамиды служит правильный треугольник; из боковых граней одна перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые рёбра?

400. В правильной n-угольной пирамиде высота вдвое меньше стороны основания. Определить двугранный угол при ребре основания.

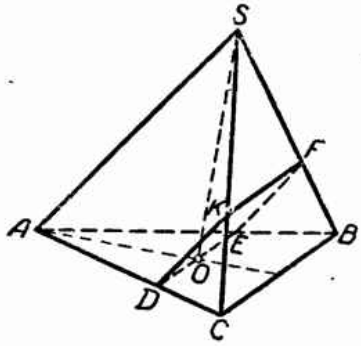
401. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Определить площадь сечения, проведённого через боковое ребро, и высоту пирамиды. Почему угол α должен быть больше $30°$?

402. 1) В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Определить площадь сечения.

2) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (черт. 25) ребро основания a и двугранный угол при ребре основания α.

Определить площадь сечения $DEFK$, проведённого через центр основания параллельно непересекающимся рёбрам SA и BC.

403. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Через центр основания проведена плоскость параллельно двум не пересекающимся рёбрам пирамиды. Определить площадь сечения.



Черт. 25

404. 1) В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равняется a и двугранный угол при ребре основания 2α. Определить площадь сечения, которое делит данный двугранный угол пополам. Исследовать формулу решения.

2) В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α. Через ребро основания проведена плоскость под углом β к основанию ($\beta < \alpha$). Ребро основания пирамиды равно a. Определить площадь сечения.

405. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна h, а двугранный угол при ребре основания равен α. Определить площадь сечения, образованного плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

406. 1) В правильной четырёхугольной пирамиде ребро основания равно a и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Через одну из вершин основания проведена плоскость перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Определить площадь сечения. Исследовать формулу решения.

2) В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α и ребро основания равно a. Через диагональ основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащему боковому ребру. Определить площадь получившегося сечения. Исследовать формулу решения.

407. 1) В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно a и наклонено к основанию под углом α. Найти площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проведённой внутри пирамиды через её вершину, параллельно стороне основания и под углом β к плоскости основания. (Рассмотреть два случая.)

2) В правильной четырёхугольной пирамиде, высота которой h составляет с боковым ребром угол α, через диагональ основания проведена плоскость под углом φ к основанию. Определить площадь сечения.

408. 1) В правильной четырёхугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к про-

тивоположной боковой грани. Определить площадь получившегося сечения, если сторона основания пирамиды a и двугранный угол при основании α.

2) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и плоский угол при вершине равен 2α. Определить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Исследовать формулу решения.

409. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Из центра основания пирамиды на две смежные боковые грани опущены перпендикуляры. Определить площадь сечения, образованного плоскостью, проведённой через два построенных перпендикуляра.

410. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h, и плоский угол при вершине равен 2α. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

411. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине α, α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

412. 1) Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним угол α. Определить площадь поверхности пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним углы α и β. Высота пирамиды равна h. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

413. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две смежные боковые грани, заключающие угол α, перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

414. Определить объём правильной n-угольной пирамиды, боковое ребро которой b наклонено к плоскости её основания под углом β. Вычислить при $n = 8$; $b = 3{,}5$ *м*; $\beta = 78°$.

415. В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и угол между ними α. Определить объём пирамиды.

416. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна $2a$ и плоский угол при вершине равен 2α. Определить объём пирамиды.

417*. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна $2a$ и двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить объём пирамиды. Исследовать формулу решения.

418*. 1) Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковая грань,

проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а каждая другая боковая грань образует с плоскостью основания угол β. Определить объём пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, прилежащий к углу α, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом α. Определить объём пирамиды.

419. Доказать, что если основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды (т. е. вершина пирамиды проектируется в центр круга, описанного около основания пирамиды), то

а) все боковые рёбра (l) пирамиды равны между собой;

б) углы (φ) наклона боковых рёбер пирамиды к плоскости основания равны между собой;

в) имеют место соотношения: $H = l \cdot \sin \varphi = R \cdot \operatorname{tg} \varphi$; $R = l \cos \varphi$;

H — высота пирамиды;

R — радиус окружности, описанной около основания пирамиды.

В этом случае какие из известных вам четырёхугольников могут быть основанием пирамиды?

Если основанием такой пирамиды является прямоугольный треугольник, то в какую точку проектируется вершина пирамиды?

420. Определить объём пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанного круга R. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом φ.

421. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого α, а каждое боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол β. Определить объём пирамиды.

422. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно m и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Определить объём пирамиды. Исследовать формулу решения.

423. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой каждая из боковых сторон и меньшая из параллельных имеют длину a, а острые углы равны α; боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объём пирамиды.

424. В треугольной пирамиде все боковые рёбра и два ребра основания равны a. Угол между равными рёбрами основания равен α. Определить объём пирамиды.

425. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a и угол между ними α. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через её высоту и вершину угла α. Определить площадь полученного сечения.

426. Доказать, что если основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды

(т. е. вершина пирамиды проектируется в центр круга, вписанного в основание пирамиды), то

а) двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны между собой;

б) высоты боковых граней пирамиды, проведённые из её вершины, равны между собой;

в) имеют место соотношения: $r = h \cdot \cos\varphi$; $H = r \cdot \operatorname{tg}\varphi = h \cdot \sin\varphi$.

H — высота пирамиды; h — высота боковой грани, проведённая к ребру основания; r — радиус круга, вписанного в основание, и φ — двугранный угол при ребре основания.

В этом случае какие из известных вам четырёхугольников могут быть основанием пирамиды?

Указание. Если в треугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости, в которой лежит основание пирамиды под одинаковыми углами, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной или вневписанной окружностей.

427*. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого 6 *см* и 8 *см*. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости, в которой лежит основание пирамиды, под углом 60°.

Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Указание. Рассмотреть четыре возможных случая решения, когда вершина пирамиды проектируется в центр вписанной и вневписанных окружностей в основание пирамиды.

428. В треугольной пирамиде стороны основания 13 *см*, 14 *см* и 15 *см* и боковые грани пирамиды наклонены к плоскости, в которой лежит основание пирамиды, под углом в 45°. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.

429. Стороны основания треугольной пирамиды равны a, b и c; каждый двугранный угол при рёбрах основания равен α. Определить площадь боковой поверхности и объём пирамиды.

430. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Каждый двугранный угол при рёбрах основания φ. Определить площадь боковой поверхности и объём пирамиды.

431. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b ($a > b$). Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определить площадь поверхности пирамиды.

432. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, диагональ которой равна l и составляет с бо́льшим основанием угол α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить площадь поверхности пирамиды.

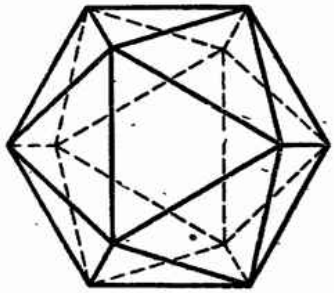
433. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α и вершина проектируется в центр вписанного в основание круга, то

$$S_{бок} = \frac{Q}{\cos\alpha} \text{ и } S = Q \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

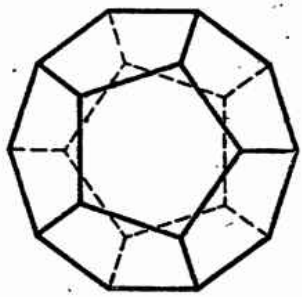
где S — площадь поверхности, Q — площадь основания. Доказать.

434. Дан правильный тетраэдр. Определить:
1) угол между двумя смежными гранями и 2) угол наклона ребра к плоскости противолежащей грани.

435. Дан правильный октаэдр. Определить угол между двумя смежными гранями.



Черт. 26



Черт. 27

436*. 1) Дан икосаэдр (черт. 26). Определить угол между двумя его смежными гранями.

2) Дан додекаэдр (черт. 27). Определить угол между двумя его смежными гранями.

Усечённая пирамида.

437. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b $(a > b)$, двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Определить объём и площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

438. В правильной усечённой треугольной пирамиде рёбра нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b $(a > b)$, двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Определить объём усечённой пирамиды и площадь её поверхности.

439. В правильной n-угольной усечённой пирамиде даны боковое ребро c и стороны оснований a и b. Определить высоту усечённой пирамиды.

440. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде стороны оснований относятся, как $m : n$ $(m > n)$; боковые рёбра наклонены к плоскости большего основания под углом α. В этой пирамиде проведена плоскость через сторону бо́льшего основания и противоположную ей сторону меньшего основания. Какой угол образует эта плоскость с бо́льшим основанием пирамиды?

441. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде даны высота H и α и β — углы, образуемые боковым ребром и диагональю усечённой пирамиды с плоскостью её бо́льшего основания. Определить площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

442. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде даны стороны оснований a и b $(a > b)$ и острый угол α в боковой грани. Определить объём. Исследовать формулу решения.

443. По данной модели правильной усечённой четырёхугольной пирамиды рассчитать:

1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания и

2) угол наклона боковой грани к плоскости основания.

§ 20. Круглые тела.

Цилиндр.

444. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена с одной из точек окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведёнными в эти точки, равен 30°. Определить угол между соединительной прямой и осью цилиндра.

445. В равностороннем цилиндре, радиус основания которого равен R, точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Соединительная прямая образует с плоскостью основания угол α. Определить расстояние этой прямой от оси цилиндра. Исследовать формулу решения.

446. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости основания. Определить расстояние центра нижнего основания от этой прямой, если его расстояние от точки касания равно d и радиус основания равен R.

447. Сечение цилиндра плоскостью, параллельное его высоте H, представляет собой квадрат, отсекающий от окружности основания дугу α. Определить расстояние этого сечения от оси цилиндра.

448. Цилиндр, высота которого h, пересечён плоскостью, параллельной оси цилиндра и отстоящей от оси на расстояние d. Секущая плоскость отсекает от окружности основания дугу α. Определить площадь сечения.

449. Высота цилиндра равна h. В развёртке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю развёртки угол α. Определить объём и площадь поверхности цилиндра.

Конус.

450. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Определить площадь полученного сечения. Исследовать формулу решения.

451. Между двумя параллельными плоскостями заключён конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину оси проведена прямая, составляющая с ней острый угол β и пересекающая боковую поверхность конуса в двух точках. Отрезок этой прямой между параллельными плоскостями равен a. Определить отрезок её, заключённый внутри конуса.

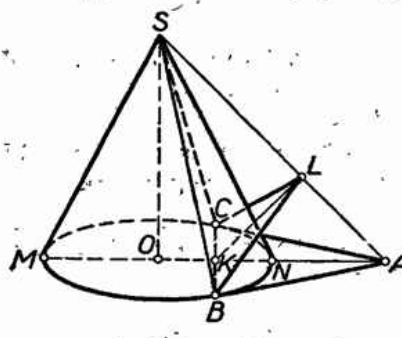
452. Площадь боковой поверхности конуса втрое больше площади основания. Найти угол между образующей и основанием.

453. Через две образующие конуса, составляющие между собой угол φ, проведена плоскость, наклонённая к плоскости основания конуса под углом α. Площадь сечения равна S. Определить высоту конуса ($\varphi = 52°16'$; $\alpha = 33°10'$; $S = 618$ *см*^{2}).

454. Высота конуса H, образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Перпендикулярно к высоте в конусе проведена секущая плоскость так, что она делит пополам площадь поверхности конуса. Определить расстояние секущей плоскости от вершины конуса.

455. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α; определить центральный угол в развёртке боковой поверхности конуса. Найти этот угол для равностороннего конуса.

456. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α и образующая с плоскостью основания угол β. Определить угол при вершине получившегося сечения.



Черт. 28

457*. На плоскости основания равностороннего конуса (вне конуса) дана точка, удалённая от окружности основания на расстояние радиуса. Через эту точку проведены к конусу две касательные плоскости. Определить угол между ними (черт. 28).

458. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая боковую поверхность на две части; если развернуть эти части на плоскость, то получатся два сектора с углами α и β ($\alpha > \beta$). Определить угол при вершине проведённого сечения.

459. Угол откоса для песка $\varphi = 25°$. Куча песка имеет вид конуса, длина окружности основания которого $c \approx 5{,}0$ *м*. Узнать возможный наибольший объём кучи.

Усечённый конус.

460. Через две образующие усечённого конуса, составляющие между собой угол β, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, соответственно равным m и n ($m > n$). Каждая хорда стягивает дугу α. Найти площадь боковой поверхности усечённого конуса.

461. В усечённом конусе, радиусы оснований которого R и r, проведена плоскость под углом β к основанию. Эта плоскость отсекает от окружности каждого основания дугу δ и не пересекает высоту усечённого конуса. Определить площадь сечения.

462. В усечённом конусе высота равна h; образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпенди-

кулярна к линии, соединяющей верхний конец её с нижним концом противоположной образующей. Определить площадь боковой поверхности усечённого конуса.

463. Площади нижнего и верхнего оснований усечённого конуса и боковой поверхности его относятся, как $m : n : p$. Определить угол между образующей и плоскостью нижнего основания.

464. В усечённом конусе отношение площадей оснований равно 4, образующая имеет длину l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Определить объём усечённого конуса.

465. В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол α и равна l. Определить площадь поверхности и объём усечённого конуса ($l = 12$; $\alpha = 70°$).

Шар и его части.

466. Через точку, данную на поверхности шара радиуса R, проведены две плоскости: одна касательная к шару, другая под углом α к первой. Определить площадь сечения шара второй плоскостью.

467. Дан шар радиуса R; плоскость, пересекая диаметр под углом α, делит его на две части в отношении 3 : 1; на какие части разделилась поверхность шара?

468. Высота шарового сегмента h; дуга в осевом сечении равна α. Определить площадь сферической поверхности сегмента.

469. Дан шаровой сегмент; через середину его высоты проведена плоскость параллельно основанию; площади сечения и основания равны. Определить дугу в осевом сечении сегмента.

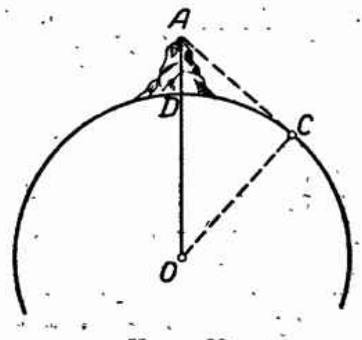
470. Определить угол в осевом сечении шарового сектора, если плоскость, проведённая через середину среднего радиуса перпендикулярно к нему, делит коническую поверхность сектора на две равновеликие части.

471. На поверхности шара радиуса R через данную её точку проведены два равных взаимно касательных круга; угол между их плоскостями равен α. Определить часть поверхности шара, заключённую между этими плоскостями.

472. На поверхности шара даны четыре точки на одинаковом расстоянии друг от друга. Определить углы между радиусами шара, проведёнными в какие-либо две из них.

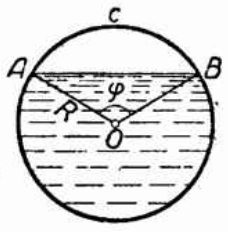
473. 1) Радиус земного шара равен ≈ 6370 *км*. Найти длины окружностей тропика (широта $\approx 23°30'$) и полярного круга (широта $\approx 66°30'$).

2) Наблюдатель, находясь на вершине горы в точке A (черт. 29), измерил угол $DAC = \alpha$, составленный лучом



Черт. 29

зрения AC, идущим к горизонту, и вертикальной линией AD. Зная радиус Земли r, определить высоту горы AD.



Черт. 30

474. Бак, имеющий форму шара радиуса R (внутренний размер), наполнен до некоторой высоты жидкостью, удельный вес которой равен d. Дуга ACB (черт. 30) равна $\varphi°$. Найти вес жидкости.

475. Резервуар для газа состоит из цилиндра, закрытого сверху шаровым сегментом. Внутренние размеры цилиндра: диаметр — 24,0 *м*, высота — 6,0 *м*. Дуга в осевом сечении шарового сегмента, покрывающего цилиндр, содержит 74°. Найти ёмкость резервуара.

§ 21. Комбинации геометрических тел.

Комбинации многогранников.

476. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре из его вершин лежат на апофемах пирамиды. Определить ребро куба.

477. В правильной четырёхугольной пирамиде ребро основания имеет длину a и двугранный угол при нём равен α. В эту пирамиду помещён куб так, что вершины одной его грани совпадают с серединами рёбер основания пирамиды, а каждое ребро противолежащей грани куба пересекает одно из боковых рёбер пирамиды. Определить объём части куба, расположенной вне пирамиды.

478. Правильная треугольная пирамида с ребром основания a и двугранным углом α при этом ребре пересечена плоскостью, параллельной основанию, так, что площадь полученного сечения равна площади боковой поверхности образовавшейся усечённой пирамиды. Определить расстояние секущей плоскости от вершины пирамиды.

479. В правильную треугольную пирамиду вписана другая правильная пирамида так, что её вершина лежит в центре основания первой, а вершины основания лежат на боковых рёбрах первой. Ребро основания первой пирамиды равно a, и боковое её ребро составляет с плоскостью основания угол α. Боковое ребро вписанной пирамиды наклонено к плоскости её основания под углом β. Определить объём вписанной пирамиды.

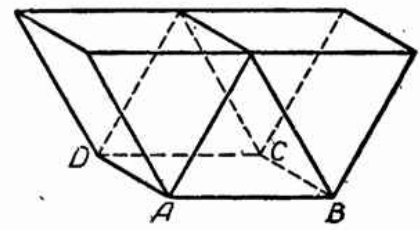
480. Две правильные четырёхугольные пирамиды имеют общее основание, и одна из них находится внутри другой. Боковое ребро большей пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α, а боковое ребро меньшей — под углом β. Радиус круга, описанного около общего основания пирамид, равен R. Определить объём части пространства, ограниченной боковыми гранями этих пирамид. Исследовать полученное решение.

481. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой; боковые рёбра одной пересекают боковые рёбра другой. Боковое ребро l одной пирамиды образует с высотой угол α. Боковое ребро второй образует с высотой угол β. Определить объём общей части двух пирамид.

482. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде сторона большего (нижнего) основания равна a; боковое ребро также равно a и составляет со стороной нижнего основания угол α. Центр нижнего основания служит вершиной пирамиды, основание которой совпадает с верхним основанием данной усечённой пирамиды. Определить разность объёмов усечённой и внутренней пирамид.

483. Основанием пирамиды служит квадрат, сторона которого равна a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что вершины его верхнего основания лежат на боковых рёбрах пирамиды, а вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Определить объём параллелепипеда, если диагональ его составляет с плоскостью основания угол α ($a = 45{,}3$ *см*; $\alpha = 41°30'$; $\beta = 43°54'$).

484. Общим основанием двух параллелепипедов является квадрат со стороной a. Две стороны верхнего основания одного являются продолжением двух сторон верхнего основания другого. Две противоположные боковые грани каждого параллелепипеда наклонены к плоскости основания под одним углом α, а две другие боковые грани перпендикулярны к той же плоскости. Определить объём общей части двух параллелепипедов (черт. 31).



Черт. 31

Комбинации цилиндров, конусов и многогранников.

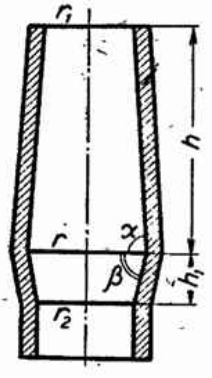
485. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Определить высоту цилиндра.

486. Определить ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

487. В конусе даны радиус основания R и угол α между образующей и плоскостью основания. В конус вписана прямая треугольная призма с равными рёбрами так, что её нижнее основание лежит в плоскости основания конуса. Определить длину её рёбер.

488. Круг, радиус которого $R = 5{,}38$ *м*, служит общим основанием двух конусов, построенных по одну от него сторону. Образующая одного конуса составляет с плоскостью основания угол $\alpha = 74°36'$, образующая другого составляет с той же плоскостью угол $\beta = 60°12'$ ($\alpha > \beta$). Определить объём части пространства, заключённой между боковыми поверхностями этих конусов.

489. На чертеже 32 изображён продольный разрез доменной печи. Внутренность её состоит из двух усечённых конусов. Верхнее и нижнее отверстия имеют радиусы r_1 и r_2. Углы наклона образующих к основанию α и β. Общий объём V. Определить радиус общего основания конусов и их высоты.



Черт. 32

490. В усечённый конус вписан конус, имеющий с ним общее меньшее основание, общую высоту и образующие, соответственно параллельные образующим усечённого конуса. Определить объём части усечённого конуса, заключенной между поверхностями обоих конусов. Наибольший угол между продолжениями образующих усечённого конуса, из которых каждая a, равен α.

491. Образующая конуса равна l и наклонена к основанию под углом α. Определить высоту вписанного равностороннего цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса.

492. В конус вписан цилиндр, диагонали осевого сечения которого параллельны образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найти объём части пространства, ограниченной боковыми поверхностями конуса и цилиндра.

493. Два конуса имеют общую высоту H и параллельно расположенные основания. Образующая одного конуса наклонена к плоскости основания под углом α, образующая другого — под углом β. Определить длину линии, по которой пересекаются их боковые поверхности.

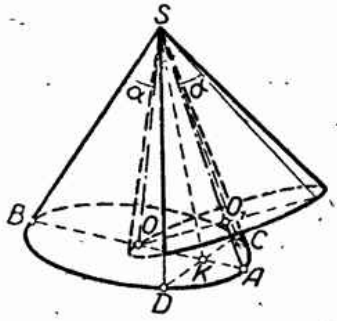
494. В равносторонний конус вписана правильная n-угольная пирамида. Определить двугранные углы при рёбрах основания пирамиды.

495. В конус вписана правильная n-угольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен α. Определить площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания его r.

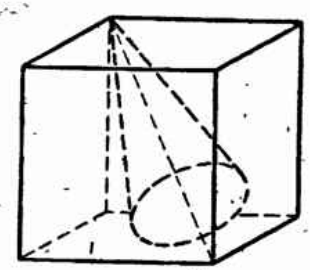
496*. Два конуса имеют общую вершину, высота каждого из них лежит на боковой поверхности другого. Определить угол между линиями их пересечения, если угол между высотой и образующей в каждом конусе равен α (черт. 33).

497. Около конуса описана треугольная пирамида. Боковая поверхность конуса линиями касания делится на три части пропорционально числам 5, 6 и 7. В каком отношении делят те же линии боковую поверхность пирамиды?

498. Два конуса имеют общее основание. В общем осевом сечении образующая одного из них перпендикулярна к противоположной образующей другого. Объём одного вдвое меньше объёма другого. Определить угол наклона образующих большего конуса к плоскости основания конусов.



Черт. 33



Черт. 34

499*. Внутри куба, ребро которого a, помещается конус так, что его вершина совпадает с одной из вершин куба, а окружность основания касается трёх граней куба, сходящихся в противоположной вершине. Образующая конуса составляет с его осью угол α. Определить радиус основания конуса (черт. 34).

500. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ. Около конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объём и площадь боковой поверхности пирамиды.

501*. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что одна из образующих расположена на диагонали основания пирамиды, а окружность каждого основания касается двух смежных боковых граней пирамиды. Определить радиус основания цилиндра.

502. Два конуса имеют концентрические основания и общую высоту h. Разность углов, составляемых образующими с осью, равна β, угол наклона образующей внутреннего конуса к плоскости его основания равен α. Определить объём части пространства, заключённой между поверхностями конусов.

503. Определить площадь боковой поверхности усечённого конуса, описанного около правильной треугольной усечённой пирамиды, если острый угол в боковой грани пирамиды равен α, а радиус вписанного в неё круга равен r.

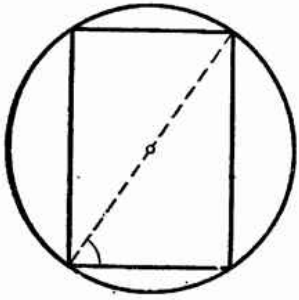
504. В конус, у которого площадь боковой поверхности m и угол наклона образующей к плоскости основания φ, вписана треугольная пирамида, имеющая основанием прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объём пирамиды.

505. В цилиндр вписан параллелепипед; большая сторона его основания a, угол между диагональю параллелепипеда и его большей боковой гранью β, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания равен α. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

506. На общем основании построены два конуса один внутри другого так, что их вершины находятся друг от друга на расстоянии a. Определить объём части пространства, ограниченной коническими поверхностями обоих конусов, если угол при вершине осевого сечения большего конуса равен α, а меньшего конуса — β ($\alpha = 53°17'$; $\beta = 90°$; $a = 32{,}52$ *м*).

507. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии b от противолежащей боковой грани. Найти площадь поверхности конуса, вписанного в данную пирамиду, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости оснований под углом α ($b = 10{,}16$ *м*; $\alpha = 61°16'$).

508. Общим основанием пирамиды и прямой призмы, расположенных по одну его сторону, является правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания; равные боковые рёбра пирамиды образуют между собой угол α. Высота призмы в два раза меньше высоты пирамиды. Определить объём призмы ($a = 3{,}52$ *м*; $\alpha = 41°20'$).



Черт. 35

При обработке конических поверхностей на токарном станке играет роль понятие конусности. Конусностью называется отношение диаметра основания конуса к его высоте. Решить следующие задачи:

509. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, если конусность равна $\frac{1}{3}$.

510. Из цилиндрического бруска меди требуется выточить деталь в форме конуса, образующая которого 125 *мм*, а конусность равна 1 : 20. Определить вес вытачиваемого конуса (удельный вес меди $d \approx 8{,}9$).

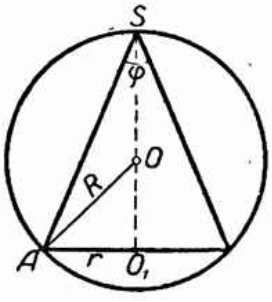
Комбинации геометрических тел с шаром.

511. На чертеже 35 изображено осевое сечение цилиндра (прямого кругового) и шара, описанного около цилиндра; считая, что радиус шара R, а диагональ прямоугольника в осевом сечении цилиндра составляет с основанием угол α, доказать, что $H = 2R \cdot \sin\alpha$ и $r = R \cdot \cos\alpha$, где H — высота цилиндра и r — радиус его основания.

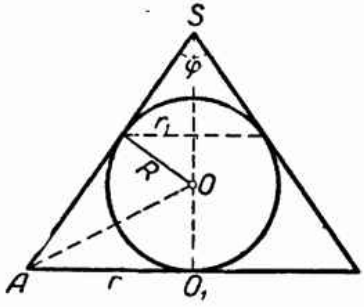
Рассмотрите самостоятельно случай шара, вписанного в цилиндр.

512. 1) На чертеже 36 изображено осевое сечение конуса (прямого и кругового) и шара, описанного около конуса. Считая, что радиус шара R и угол при вершине осевого сечения конуса φ, доказать, что $\sphericalangle AOO_1 = \varphi$; $SO_1 = H = 2R\cos^2\frac{\varphi}{2}$;

$l = 2R\cos\frac{\varphi}{2}$; $H(2R - H) = r^2$; $r = R\sin\varphi = l\sin\frac{\varphi}{2} = H\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$;



Черт. 36



Черт. 37

2) На чертеже 37 изображено осевое сечение конуса (прямого и кругового) и шара, вписанного в конус. Считая радиус шара равным R и угол при вершине осевого сечения конуса φ, доказать справедливость соотношений:

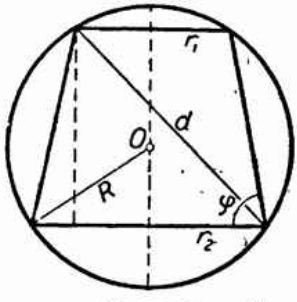
$$\angle OAO_1 = 45° - \frac{\varphi}{4};\ SO_1 = H = \frac{2R\cos^2\frac{\pi-\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = r\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};\ r_1 = R\cos\frac{\varphi}{2},$$

где r_1 — радиус окружности касания поверхности конуса с поверхностью шара; $r = R\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{4}$; $l = r + R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

513. На чертеже 38 изображено осевое сечение прямого кругового усечённого конуса и шара, описанного около конуса. Считая известным радиус шара R, образующую конуса l и угол φ наклона образующей конуса к плоскости нижнего его основания, доказать справедливость следующих соотношений:

$d = 2R\sin\varphi$; $H = l\sin\varphi$; $(r_2 + r_1)^2 = \sin^2\varphi\,(4R^2 - l^2)$; $r_2 - r_1 = l\cos\varphi$.

(l — образующая, H — высота, d — диагональ осевого сечения, r_2 и r_1 — радиусы нижнего и верхнего оснований.)



Черт. 38

514. 1) Шар радиуса R вписан в усечённый конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса α. Найти радиусы оснований и образующую усечённого конуса.

2) Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы a. Найти высоту призмы при $n = 3; 4; 6$.

515. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

516. Определить радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. (Вычислить при $n = 8$; $a = 3{,}5$ *м*; $\alpha = 58°$.)

517. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α, двугранные углы при основании равны φ. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

518. В конусе даны длина c окружности основания и угол α между образующей и основанием. Определить длину линии, по которой взаимно касаются боковая поверхность конуса и поверхность вписанного в него шара.

519. В конус вписан шар; линией касания поверхность этого шара делится в отношении $m : n$. Определить угол наклона образующей конуса к его оси.

520*. Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объём которого в m раз более объёма вписанного в конус шара. (Найти наименьшее значение m; вычислить угол, если $m = 2\frac{1}{4}$.)

521. Сечение, перпендикулярное к высоте конуса, делит конус на две равновеликие части и проходит через центр описанного около конуса шара. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

522*. В конусе помещены два шара так, что они касаются друг друга и поверхности конуса. Отношение радиусов этих шаров равно $m : n$ ($m > n$). Определить величину угла при вершине осевого сечения конуса.

523. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырёх равных шаров, расположенных так, что каждый касается трёх других.

524. Определить радиус шара, описанного около усечённого конуса, в котором радиусы оснований R и r, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α ($R > r$).

525. В усечённый конус, радиусы оснований которого r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$), вписан шар. Определить 1) площадь поверхности шара и 2) угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

526. 1) Высота правильной четырёхугольной призмы равна h, а диагональ призмы наклонена к боковой грани под углом α. Определить радиус шара, описанного около призмы.

2) Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, диагонали двух боковых граней, проведённых из одной вершины верхнего основания призмы, образуют угол 2α, обращённый к основанию. Определить радиус описанного шара.

527. Около шара, объём которого V, описана прямая четырёхугольная призма; основание призмы — ромб с острым углом α. Определить объём призмы.

528. В шар радиуса R вписана прямая призма, основание её — прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая её боковая грань — квадрат. Определить объём призмы.

529. Призма, основание которой прямоугольный треугольник с острым углом α, описана около шара. Вычислить объём призмы, если перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу в основании призмы, равен h.

530. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро b образует с плоскостью основания угол α. Определить радиус шара, описанного около пирамиды.

531. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a и двугранный угол при ребре основания равен α. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

532. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания a и плоский угол при вершине равен α. Определить 1) радиус вписанного шара и 2) радиус описанного шара.

533. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Определить высоту пирамиды.

534. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, каждый из равных углов которого α и сторона между ними a. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β. Определить радиус вписанного в пирамиду шара.

535. 1) Около шара радиуса R описана четырёхугольная пирамида, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом β. Определить объём и площадь поверхности пирамиды.

2) В шар радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить ребро основания пирамиды.

536*. В правильной четырёхугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

537. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а боковые рёбра образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объём этой пирамиды, если радиус описанного около неё шара равен R.

538*. Определить радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, сторона основания которой равна a и плоский угол при вершине равен α.

539. Определить радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, стороны основания которой a, b и c, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом α.

540. В правильную шестиугольную пирамиду с двугранным углом α при ребре основания вписан шар радиуса R. Определить площадь боковой поверхности усечённой пирамиды, которая отсечена от данной пирамиды плоскостью, касательной к шару и параллельной плоскости основания пирамиды.

541. Около шара описана правильная четырёхугольная усечённая пирамида; объём восьмигранника, вершинами которого служат точки касания поверхности шара с гранями усечённой пирамиды, вчетверо меньше объёма шара. Определить двугранные углы при ребре основания пирамиды.

542*. В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α; высота h пирамиды служит диаметром шара. Найти длину кривой пересечения их поверхностей.

543. В конус вписан шар; сечение, касательное к шару и параллельное основанию конуса, делит конус на две равновеликие части. Определить угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

544*. Вокруг шара радиуса R описан усечённый конус, образующая которого наклонена к плоскости большего основания под углом α. Определить длину линии, по которой шар касается боковой поверхности усечённого конуса.

545. В усечённый конус вписан шар радиуса R; из центра шара диаметр большего основания усечённого конуса виден под углом α. Определить объём усечённого конуса.

546. 1) В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с высотой угол α. Определить объём конуса.

2) Определить площадь поверхности шара, вписанного в конус, высота которого h и угол наклона образующей к плоскости основания φ.

547. Вычислить объём конуса, зная радиус R шара, вписанного в конус, и угол α, под которым из центра шара видна образующая конуса. Исследовать формулу решения.

548. В полушар радиуса R вписан усечённый конус так, что его большее основание совпадает с основанием полушара, а образующая наклонена к плоскости большего основания под углом α. Определить площадь поверхности конуса.

549*. Шар касается боковой поверхности конуса по окружности основания. Поверхность шара делится при этом на две части, из которых одна в n раз больше другой. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

550. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна H; перпендикуляр, опущенный из центра шара, описанного около пирамиды, на её боковую грань, образует с высотой угол α. Определить объём шара.

§ 22. Тела вращения.

551. Треугольник, одна из сторон которого $a = 6{,}5$ *м* и прилежащие к ней углы $B = 97°$ и $C = 13°$, вращается вокруг данной стороны. Вычислить объём и площадь поверхности тела, получившегося при вращении.

552. Определить объём тела, образованного вращением треугольника ABC около оси, проходящей через вершину A и параллельной стороне BC, зная, что $BC = a = 23{,}54$ *м*, проекция стороны AB на ось вращения $b' = 7{,}33$ *м*, а угол между AB и осью равен $\alpha = 18°36'$.

553. Правильный треугольник, сторона которого a, вращается около оси, проходящей вне его через конец его стороны под острым углом α к этой стороне. Определить площадь поверхности тела вращения.

554. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при вершине α, вращается около боковой стороны. Найти объём и площадь поверхности тела вращения.

555. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить площадь поверхности и объём тела вращения.

556. В треугольнике даны стороны b и c и угол между ними α; этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла α и равно наклонена к сторонам b и c. Определить объём тела вращения.

557. В треугольнике даны основание a и прилежащие углы α и $(90° + \alpha)$. Определить объём тела, полученного при вращении этого треугольника около его высоты.

558. Два треугольника — равнобедренный с углом $\alpha = 54°16'$ при вершине и равносторонний — лежат в одной плоскости и имеют общее основание $a = 25{,}34$ *см*. Определить объём и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольников около оси, проходящей через одну из общих вершин этих треугольников параллельно высоте равнобедренного треугольника.

559. Определить объём и площадь поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника $ABCD$ около оси, проходящей через его вершину A, перпендикулярно диагонали $AC = d$, если угол $CAB = \alpha$ ($d = 34{,}06$ *см*; $\alpha = 56°14'$).

560. Периметр прямоугольного треугольника $2p = 27{,}4$ *см*, один из острых углов $\alpha = 41°10'$. Определить объём тела, полученного при вращении треугольника около гипотенузы.

561. В прямоугольной трапеции, описанной около круга радиуса R, острый угол α. Определить площадь поверхности тела, полученного при вращении этой трапеции около меньшей из непараллельных её сторон.

§ 23. Общий отдел.

562. 1) Доказать, что дробь $\frac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}$ при любом допустимом значении α принимает неотрицательные значения.

2) Доказать:

$$(\operatorname{ctg} 590^\circ + \operatorname{tg} 230^\circ)\left(\frac{\cos 670^\circ}{\cos 490^\circ} + \cos 770^\circ \cdot \sin 670^\circ\right) = \operatorname{tg}^2 40^\circ.$$

563. 1) Доказать $\sin\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{5} = 0$.

2) Доказать:

$$\sin 1150^\circ + \cos 1460^\circ + \cos 1060^\circ - \sin 650^\circ - \cos 880^\circ = 5\sin 70^\circ.$$

564. Доказать, что $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

565. 1) Какому условию должны удовлетворять значения параметра α, чтобы уравнение $\sin x = \frac{2a-3}{4-a}$ имело решение?

2) То же для уравнения $\cos x = \frac{5a-2}{2-3a}$.

566. Преобразовать в сумму:

1) $4\sin 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 6^\circ$; 2) $8\sin 11^\circ \cdot \sin 21^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \cos 41^\circ$;

3) $8\sin 5^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \cos 10^\circ$; 4) $4\sin 12^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \cos 20^\circ$.

567. Доказать:

1) $\sin 70^\circ - \cos 80^\circ = \sin 50^\circ$; 2) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin 80^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 6^\circ - \sin 6^\circ = 2\operatorname{tg} 6^\circ \cdot \sin^2 3^\circ$; 4) $2\sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 10^\circ = \cos 50^\circ$; 5) $\sin 10^\circ \cdot \sin 3^\circ + \sin 5^\circ \cdot \sin 2^\circ = \sin 5^\circ \cdot \sin 8^\circ$;

6) $\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$;

7) $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2}} = \frac{1}{2}|\sin 2\alpha|$.

568. Преобразовать в произведение:

1) $1 - \cos^2\alpha - \sin^2\beta$; 2) $\sin 80^\circ + \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 20^\circ$.

569. Решить уравнения:

1) $8^{\operatorname{tg} x} = 4^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; 2) $3^{\lg\operatorname{tg} x} + 3^{-\lg\operatorname{tg} x} = 2$.

570. Исключить x из систем уравнений:

1) $\begin{cases} a\operatorname{ctg} x = m \\ b\sin 2x = n \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \cos x = m \\ \sin^2 x - \cos^2 x = n \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin 2x = b \end{cases}$

571. Расположить в порядке возрастания:

$\sin 380^\circ$, $\sin\frac{\pi}{9}$ и $\sin 0{,}349$.

572. 1) Вычислить $\operatorname{arc\,tg} 1{,}1 + \operatorname{arc\,sin} 0{,}7 + \operatorname{arc\,cos} 0{,}8$.

2) Вычислить приближенно, не пользуясь таблицами натуральных значений, $\operatorname{tg} 89^\circ 27'$.

573. 1) Доказать, что логарифм синуса угла α равен сумме логарифмов тангенса и косинуса этого угла $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Доказать, что синус внутреннего угла в правильном n-угольнике равен синусу угла между двумя радиусами, проведёнными из центра правильного многоугольника к двум его соседним вершинам.

574. Решить уравнения:

1) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$; 2) $\sin x = \operatorname{tg} 2x$; 3) $\cos(x+10^\circ)\cdot\cos(x-50^\circ)=\frac{1}{2}$.

575. Доказать тождества:

1) $\cos 25^\circ = \frac{\cos 40^\circ}{2\cos 65^\circ}$;

2) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{4\cos 20^\circ}{\sin 60^\circ}$;

3) $\frac{\sin 26^\circ}{\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\sin 17^\circ\cdot\sin 2^\circ} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 43^\circ\cdot\sin 2^\circ}$;

4) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

5) Если A, B и C составляют арифметическую прогрессию, то $\sin A - \sin C = 2\sin(A-B)\cdot\cos B$.

576. Вычислить $\sin^3 x - \cos^3 x$, если $\sin x - \cos x = m$.

577. Доказать, что для любого значения α справедливы неравенства:

1) $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1$; 2) $\sin\alpha\cdot\cos\leqslant\frac{1}{2}$; 3) $\sin\alpha+\cos\alpha<\sqrt{2}$.

578. Доказать, что

1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<\pi$; 2) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 \geqslant 4$.

При каких значениях α это соотношение не имеет места?

579*. Решить неравенства:

1) $\cos^2 x + 2\cos x > 0$; 2) $3\sin^2 x + 2\cos x + 4\cos^2 x > 0$;

3) $\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x - 3\cos^2 x < 0$.

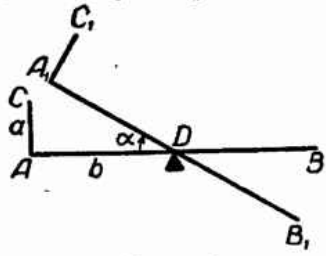
580*. 1) Доказать, что радианная мера острого угла заключена между его синусом и тангенсом.

2) Доказать, что радианная мера x острого угла удовлетворяет системе неравенств: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$.

3) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, где x — радианная мера острого угла.

581. На конце рычага AB первого рода перпендикулярно к нему прикреплён стержень AC (черт. 39) длиной a *см*. Рычаг повернули на $\angle\alpha$, и он занял положение A_1B_1, причем $A_1D = AD = b$. На какой высоте от AB, считая по вертикали, находится теперь конец C стержня AC?

582. Используя условие задачи 50, решить следующую задачу. Длина кривошипа r *см*, длина шатуна l *см*, и точка A равномерно вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью $\omega \frac{1}{сек}$, занимая первоначальное положение в точке C. Определить угол CBA через t секунд после начала движения.



Черт. 39

583*. Общие внешние касательные к двум внешнекасающимся окружностям между точками касания имеют длину a и составляют с линией центров угол α. Точки касания прямых каждой окружности соединены хордами. Определить площадь четырёхугольника, вершинами которого являются точки касания.

584. Между двумя параллельными плоскостями проведены наклонная, образующая с ними угол α, и перпендикуляр, равный $2a$. Определить расстояние между серединами этих прямых, если расстояние между их концами в каждой плоскости равно b.

585*. 1) Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины тупого угла ромба на его стороны, равно d. Угол между этими перпендикулярами равен α. Определить объём тела, полученного при вращении ромба вокруг оси, проходящей через вершину его острого угла перпендикулярно к большей диагонали.

2) Острый угол прямоугольного треугольника разделён медианой, равной a, на части, из которых бо́льшая равна α. Определить объём тела, полученного при вращении данного треугольника вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно данной медиане.

586. Около шара описан прямой параллелепипед, объём которого в m раз больше объёма шара. Определить углы в основании параллелепипеда.

587. Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна площади основания конуса. Определить угол при вершине осевого сечения конуса.

588*. 1) Вершина треугольника находится в центре данного круга радиуса R, а основанием его служит хорда этого круга. Какой угол должен быть при вершине треугольника для того, чтобы площадь его была наибольшей?

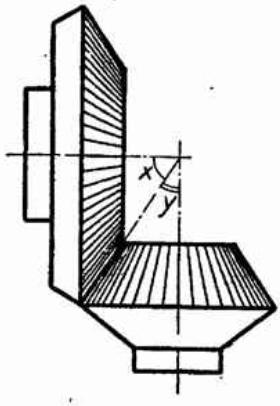
2) Из всех вписанных в данный круг углов, равных каждый α, найти такой, у которого сумма образующих его хорд наибольшая.

589. 1) $y = \sin x - \cos x$. Установить: область определения и границы изменения: период; максимумы и минимумы; построить график этой функции.

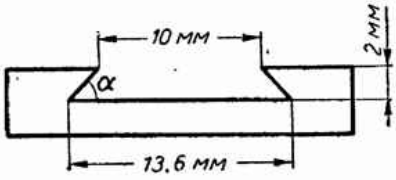
2) То же для функции $y = \sin x \sin (\alpha + x)$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

590. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют острый двугранный угол α, а третья боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Пирамида вписана в шар радиуса R. Найти объём пирамиды.

591. Два вала, расположенные под прямым углом друг к другу, соединены при помощи конических шестерёнок. Одна шестерня имеет диаметр 48 *см*, а другая 32 *см*. Определить углы x и y наклона зубцов к осям валов (черт. 40).



Черт. 40

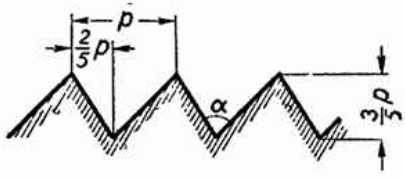


Черт. 41

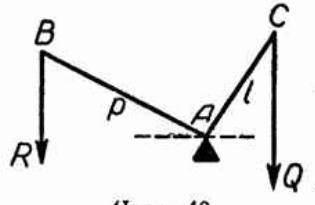
Указание. Для проверки правильности полученных значений воспользуйтесь соотношением $x + y = 90°$.

592. 1) На чертеже 41 дана фронтальная проекция паза и указаны соответствующие размеры. Определить угол α наклона сторон паза к его основанию.

2) На чертеже 42 показана винтовая нарезка и указаны соответствующие размеры. Вычислить угол α для заточки резца при нарезывании этой резьбы.



Черт. 42



Черт. 43

593. 1) Две силы P и Q приложены к материальной точке. Найти угол между их направлениями, зная, что если увеличить этот угол вдвое, то величина равнодействующей не изменится.

2) При равновесии ломаного рычага BAC (черт. 43) на концы его плечей $AB = p$ и $AC = l$ действуют силы R и Q. Определить углы, образуемые плечами рычага с горизонтальной плоскостью, если плечо AC составляет угол, в два раза больший, чем плечо AB. (Вес рычага не учитывается.)

594. Решить уравнения;

1) $3\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 3{,}5$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}625$;
3) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2 x = 3$;
4) $8\cos^2 x + 25\sin x \cdot \cos x - 69\sin^2 x + 1 = 0$.
5) $6\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 3$;
6) $3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 2$; 7) $\sin x + \cos x = \cos 2x$;
8) $\sin 3x = 4\sin x \cdot \cos 2x$; 9) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$;
10) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;
11) $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$; 12) $\sin x + \sin 1 = \sin(x + 1)$;
13) $1 - \operatorname{tg} x = \cos 2x$; 14) $\cos 15x = \sin 5x$;
15) $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{5x}{2} = 0$.

595. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$; 2) $\sin 3x = \operatorname{tg} 6x$; 3) $\sin 3x \cdot \sin x = -1$;
4) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$; 5) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$;
6) $\sin 6x \cdot \cos 2x = \sin 5x \cdot \cos 3x - \sin 2x$; 7) $4\sin x + 3\cos x = 2$;
8) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$; 9) $4\sin x + 3\cos x = 5$;
10) $5(\sin x + \cos x)^2 + 7 = 12(\sin x + \cos x)$;
11) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x - \sin 2x + 1 = 0$;
12) $\sqrt{2}\cos 13x = \cos 5x + \sin 5x$;
13) $\operatorname{tg}(2x + 1) \cdot \operatorname{ctg}(x + 1) = 1$;
14 $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\sin^2 2x$;
15) $\cos(x + 10^\circ) \cdot \cos(x - 50^\circ) = 0{,}5$.

596*. Решить уравнения:

1) $\sin(\pi \operatorname{tg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$; 2) $\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$;
3) $\frac{\sin x}{\sin 2x} = 0$; 4) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$;
5) $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$; 6) $\sin(7\pi - x) = \cos(4x + 9\pi)$;
7) $\sin(1 + 3x) + \cos 3x = 0$; 8) $\operatorname{tg}(x + 20^\circ) + \operatorname{tg}(70^\circ - x) = 2$;
9) $4^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{2}$; 10) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 1$; 11) $3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2$;
12) $8^{1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \cdots} = 4$; 13) $8\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \sqrt{3}$;
14) $\cos^4 \frac{3}{2}x - \sin^4 \frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 15) $4^{\cos(\alpha + x)} = \sqrt[\cos x]{2^{\cos \alpha}}$.

597. Задачи некоторых математиков.
1) Клавдий Птолемей (II век нашей эры).
Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

2) Тихо де Браге (1546—1601).

Доказать, что $\operatorname{tg}(B+C)=\frac{a\sin B}{a\cos B-c}$, если A, B, C — углы треугольника, a, b, c — его стороны.

3) Виета (1540—1603).

Доказать тождество: $\sin(60^\circ+\alpha)=\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)$.

4) Леонард Эйлер (1707—1783).

а) Доказать методом математической индукции справедливость каждого из следующих равенств:

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$
$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

n — любое натуральное число.

б) Доказать справедливость следующих тождеств:

$$\sin(2y+z)=2\cos y\cdot\sin(y+z)-\sin z;$$
$$\sin(3y+z)=2\cos y\cdot\sin(2y+z)-\sin(y+z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos(2y+z)=2\cos y\cdot\cos(z+y)-\cos z;$$
$$\cos(3y+z)=2\cos y\cdot\cos(2y+z)-\cos(y+z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Указание. Дуги z; $z+y$; $z+2y$... составляют арифметическую прогрессию.

в) Доказать справедливость каждого из тождеств:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\mp 2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}+b^2\right);$$
$$a^4+b^4=\left(a^2-2ab\cdot\cos\frac{\pi}{4}+b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\cdot\cos\frac{3}{4}\pi+b^2\right);$$
$$a^4-b^4=\left(a^2-2ab\cdot\cos\frac{2\pi}{4}+b^2\right)\cdot(a+b)\cdot(a-b).$$

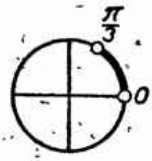
ОТВЕТЫ.

8. $a^2 \sin\alpha$; $\approx 21\ см^2$. 9. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{d_2}$; $59°28'$. 10. $\cos\alpha = \frac{b}{2a}$; $36°39'$. 11. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2h}$; $73°58'$. 13. $2R\sin\frac{\alpha}{2}$; $\approx 2{,}698$. 14. $40°13'$. 15. $57°27'$. 16. $\approx 47°16'$; $\approx 32{,}8\ см$. 17. $97°12'$. 21. $R = \frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)}$. 23. $H\operatorname{ctg}\alpha$; $\approx 947\ м$. 24. $H\operatorname{ctg}\alpha$; $\approx 1{,}91\ км$. 25. $h + H\operatorname{tg}\alpha$; $\approx 240\ м$. 26. $\approx 3{,}0\ см$. 27. $a\operatorname{tg}\beta$; $\approx 21\ м$. 28. $\approx 57'$. 29. $\frac{a}{\cos\alpha}$. 30. $\approx 40\ м$. 31. $\approx 3{,}3\ м$. 32. $\approx 2{,}6\ м$. 33. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. 35. $\approx 52°26'$; $\approx 7{,}1\ кГ$. 36. $\approx 22\,380\ км$. 37. $P\sin\alpha$; $\approx 0{,}2\ т$. 40. 1) $2R\sin\frac{180°}{n}$; 2) $2R\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$; 3) $\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

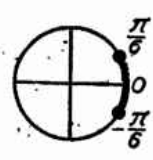
41. 2) при n нечётном $\frac{a_n}{2\sin\frac{90°}{n}}$; при n чётном $\frac{a_n}{\sin\frac{180°}{n}}$.

44. $\pm 1080°$; $\pm 10\,800°$. 48. 1) $360°\,n + 120°$; $120°$; $480°$; $840°$; ... 50. $\angle AOC > 0$; $\angle ABC < 0$. 55. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{12}\pi$; $\frac{3}{20}\pi$; $\approx 0{,}9708$; $\approx 0{,}8387$. 56. $108°$; $81°$; $40°$. 67. 1) $10\pi\ \frac{радиан}{сек}$; 2) $2\pi\ \frac{м}{сек}$; 3) $12\pi\ \frac{м}{сек}$; 4) $v = r\omega\ \left(\frac{м}{сек}\right)$. 71. 1) $\frac{\pi}{21\,600} \cdot \frac{радиан}{сек}$; 2) $\frac{\pi}{1800} \cdot \frac{радиан}{сек}$.

72. $\frac{8}{15}\pi$ радиан и не зависит от числа зубцов ведущего колеса.



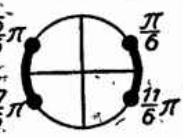
Черт. 44



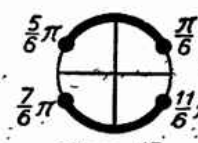
Черт. 45

74. 27 *см*. 79. 1) (4,5; 9,5). 80. 2а). черт. 44; 3а) черт. 45. 81. $\approx 8{,}6$; $\approx 10{,}6$; $\approx 5{,}8$. 83. 1) $(-2; -5)$. 86. $\approx 26{,}8\ см$; $\approx 29{,}7\ см$. 87. $\approx 5{,}4\ см$; $\approx 68°12'$. 88. $\approx 22\ кв.\ ед$. 90. 1) $\approx 7{,}9\ см$; $\approx 6{,}2\ см$. 91. 1) $\approx -0{,}8$; $\approx -0{,}6$. 92. 1) 6 мин.; 18 мин. 2) 12 мин. 93. 1) $\approx 5{,}8$. 100. 1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. 2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ и $x \neq \pi$; 3) $0 < x < \pi$ и $x \neq \frac{\pi}{2}$. 101. $\cos^2 x > 0$, если $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 103. 1) lm; $\pm l\sqrt{1-m^2}$. 109. 1) 1; $\sqrt{2}$; 1; 2) 0; $\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; 4) $2(1-\sqrt{2})$;

5) -2; 6) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$; 7) $\sqrt{3}$. **110.** Чётные: $\cos x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\operatorname{tg}^2 x$; $-\cos x$; $\dfrac{x}{\sin x}$; $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. **112.** 1) $\dfrac{3a+b}{2}$; 2) $\dfrac{-9+16\sqrt{3}}{16}$; 3) $a^3(1+12\sqrt{3})$; 4) 2. **114.** 1) -3; 2) $-3\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) -3. **116.** 1) а) черт. 46; б) черт. 47; 2) а) $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{5}{6}\pi$; б) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{3}{4}\pi$; г) $-42°46' < \alpha < 42°46'$. **117.** 1) а) $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) невозможное; в) $\approx 89°11' + 180° n$; г) $\approx 125° + 180° n$; 2) а) 2; 0; б) -2; -4; в) 4; 0; г) 2; 0. **118.** 1) нет; 2) да; $0° < \alpha < 90°$; 3) да; $270° < \alpha < 360°$. **120.** 3) $\approx \pm 0{,}960$; $\approx \pm 0{,}293$; $\approx \pm 3{,}42$.



Черт. 46



Черт. 47

124. 2) $\dfrac{40}{41}$; $-\dfrac{9}{40}$; $-4\dfrac{4}{9}$; 4) $-\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{3}{4}$; $1\dfrac{1}{3}$. **126.** 1) $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$; $\dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$; $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$; 2) $\dfrac{b^2}{a^2}$; $-\dfrac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$; $-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$ и $a \neq 0$; $b \neq 0$; 3) $\cos\alpha = \sqrt{-a(a+2)}$; $0 \geqslant a \geqslant -1$. **128.** 1) $-\dfrac{\sqrt{7}}{12}$; 2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **129.** 1) а) 0,3420; 0,9397; 0,3640; 2,747; 2) а) 0,1351; б) 1,3350; в) 2,5450. **130.** 1) а) $2-2\sin^2\alpha$; б) $2\cos^2\alpha$; 2) а) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 \pm \sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; б) $1-\cos\alpha$; 3) а) $\dfrac{\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\pm\dfrac{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$; 4) а) $\dfrac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}$; б) $\dfrac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$. **131.** 1) $2\cos^2\alpha$. $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{1}{2}$; 1; 1,3744; любое; 2) $2\sin^2\alpha$; 2; 0; любое; 3) $2\sin\alpha$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$; $\alpha \neq \dfrac{3}{2}\pi$; 4) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$; $\alpha \neq \pi k$; 5) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\alpha \neq \pi k$; 13) $|\cos\alpha|$. **133.** 5) $\dfrac{2}{|\cos\alpha|}$; 6) $|\sin\alpha + \cos\alpha|$; 9) $\cos^2\beta$; 10) 1. **135.** 1) $\dfrac{m^2-1}{2}$. 2) m^2-2; m^3-3m; 3) 1; 4) 1; 5) $|a|$; 6) а) $\dfrac{10}{21}$; б) $1\dfrac{5}{7}$; **139.** 3) $2\pi n \pm \dfrac{\pi}{3}$. **142.** 2) а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $a \cdot \cos\dfrac{b}{c}$. **150.** 1) $\dfrac{11}{6}\pi$; 2) $\dfrac{13}{12}\pi$. **151.** 1) $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5}{6}\pi$; $2\pi n + \dfrac{\pi}{6}$; $2\pi n + \dfrac{5}{6}\pi$; или $\pi n + (-1)^n\dfrac{\pi}{6}$; $n = 0$; ± 1; ± 2... 3) $\dfrac{\pi}{4}$; $\pi n + \dfrac{\pi}{4}$; **152.** 1) а) $\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$; б) πn; в) πn; г) $\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$; 2) а) $2\pi n$; б) $2\pi n + \dfrac{\pi}{2}$; 3) а) $\pi(2n+1)$;

3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **153.** 1) $2\pi n-\frac{\pi}{2}$; 2) $360°n\pm 51°50'$; 3) $180°\,n\pm 35°16'$; 4) $2\pi n-\frac{\pi}{2}$; $\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **154.** 1) πn; 2) πn; $180°\,n+63°26'$; 3) $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $180°\,n+165°58'$; 4) πn; $\pi n\pm\frac{\pi}{4}$. **155.** 1) πn; 2) $2\pi n\pm\frac{\pi}{3}$. 3) $\pi n+\frac{\pi}{4}$; $180°n+56°19'$; 4) $\frac{\pi}{2}\cdot(2n+1)$. **156.** $360°n+64°30'$; $360°n+205°30'$; 2) $2\pi n\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $180°n+(-1)^n 24°27'$; 4) $\pi n\pm\frac{\pi}{3}$; 5) $\pi n\pm\frac{\pi}{6}$. **157.** 1) $2\pi n$; 2) $2\pi n$; $2\pi n+\frac{\pi}{2}$. **158.** 1) $\pi n+\frac{\pi}{4}$. 2) $180°n+41°11'$; 3) $\pi n\pm\frac{\pi}{6}$; 4) $180°n+75°58'$; $180°n+18°26'$; 5) $\pi n+\frac{\pi}{4}$; $\pi n-\operatorname{arc\,tg}3$; 9) решений нет.

159. 1) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\approx 0{,}259$. **161.** 1) $\frac{63}{65}$; $-\frac{33}{65}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$. **162.** 2) $-\frac{33}{65}$; $-\frac{56}{65}$; $\frac{63}{65}$; $-\frac{16}{65}$. **164.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\approx 0{,}259$. 2) $\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$. **166.** 1) $-\frac{8}{17}$; 2) $\frac{40}{41}$. **170.** 2) $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-$ $-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$. **172.** 0,25. **175.** 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$; 3) 1; 5) $\operatorname{tg}\alpha$. **179.** 1) $\approx 0{,}8116$; 2) $\approx 0{,}4814$; 3) $\approx 0{,}446$; 4) $\approx 3{,}767$; 5) $\approx 4{,}037$.

181. 1) $\pi k-\frac{\pi}{4}$; 2) $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $\pi k+\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$; 4) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 5) $2\pi k+\frac{\pi}{2}$; 6) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 8) πk; 9) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{2}$; 10) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{4}$. **185.** 1) 2; $-5{,}5$; 2) $-\frac{7}{17}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) -3; 5) 2. **189.** $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

191. 1) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$; 2) $\pi k\pm\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{m+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+m\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

199. 1) $-14°39'$; 2) $-51°29'$; 3) $124°20'$; 4) $\approx 65°11'$; 5) $\approx -66°53'$; 6) $85°04'$; 7) $53°$; 8) $110°43'$. **200.** 1) $40°$; $140°$; $-220°$; $-320°$; 2) $43°$; $317°$; $-43°$; $-317°$. **203.** 5) $-\operatorname{tg}^3\alpha$; 6) $\sin 40°-2\sin 20°$; 7) $2\operatorname{tg}20°+3\cos 10°$; 8) 0; 9) $\frac{1+\sin 56°}{\operatorname{tg}56°-\cos 56°}$; 10) $\sin^2 35°$. **206.** 1) $\approx -2{,}3028$; 2) $\approx -0{,}2930$.

208. 1) решений нет; 2) $\pi n-\frac{\pi}{4}$; 3) $\pi n\pm\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}(2\pi+1)$; 5) $121°41'$; 6) $-85°28'$.

209. 1) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{25}$; $3\frac{3}{7}$; 2) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-\frac{120}{119}$; 3) 0,1737; 0,9847.

211. 1) $\pm\frac{4n(1-n^2)}{(1+n^2)^2}$; $\frac{6n^2-n^4-1}{(1+n^2)^2}$. **212.** 1) $\pi n\pm\frac{\pi}{6}$; 2) $90°n+(-1)^n 22°30'$; 3) $180°n\pm 17°2'-15°$; 4) $90°n+43°32'$.

213. 2) $-0{,}96$. 214. 1) 4; 2) $\frac{4}{225}$. 215. 1) πn; 2) например, $\alpha \approx 111°28'$; 3) πn.

216. 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

218. 1) 0,6428; 9) 0,9866; 10) 0,3310; 11) $-0{,}9398$; 12) $-0{,}8344$. 222. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) 2,169; 3) $-0{,}4699$; 4) $-0{,}9739$. 226. 1) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{14}}{4}$;

$-\frac{\sqrt{7}}{7}$. 230. 1) $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 231. $2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$; $\frac{\pi R^2\alpha}{360°} - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$.

232. 1) $\frac{4}{5}$. 233. 1) $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$; 2) $|\cos 2\alpha|$; 3) 1; 4) 1; 5) $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}\right|$; 6) $|\operatorname{ctg}\alpha|$;

7) $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$; 8) $\sqrt{2}\,|\cos 4\alpha|$. 237. 1) $2\pi k + 2\operatorname{arc tg}\frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$; 2) $2\pi k - 2\operatorname{arc tg}\frac{4 \pm \sqrt{21}}{5}$.

239. 1) $\frac{1}{2}(\cos 30° + \cos 10°)$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right)$. 240. 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{5}$;

$\frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{\sin 3\alpha}{4}$; $\frac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{8}$; $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{8}$; 2) $\frac{1}{8}(1-\cos 4\alpha)$;

$\frac{1}{16}(2\cos\alpha - \cos 5\alpha - \cos 3\alpha)$; $\frac{1}{16}(2\sin\alpha - \sin 5\alpha + \sin 3\alpha)$.

243. 1) $\sqrt{2}\cos(45° - \alpha)$; 3) $2\sin\left(45° + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(45° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; 7) $\sqrt{3}$. 244. 3) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$; 5) $2\sin^2 8°30'$;

6) $-2\sin^2 15°30'$; 7) $2\cos^2 20°$; 12) $-2\sin^2 32°$; 13) $\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

245. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $-4\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $-2\sqrt{2}\sin^3\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45° - \alpha)}{\cos\alpha}$;

5) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45° + \alpha)}{\cos\alpha}$; 6) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45° - \alpha)}{\cos\alpha}$;

7) $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $-\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; 11) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$;

15) $-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 3\alpha$. 246. 1) $4\cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $4\sin(15° + \beta)\cdot\cos(15° - \beta)$; 7) $4\sin(30° + \alpha)\cdot\sin(30° - \alpha)$. 251. 1) $\frac{\pi k}{8}$;

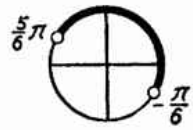
2) $\frac{\pi k}{3}$; 3) $\frac{\pi k}{3}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; 5) πk; $\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 6) πk; $\frac{\pi}{10}(2k+1)$; 8) $\frac{\pi}{5}(2k+1)$;

$\frac{\pi}{3}(2k+1)$; 12) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 15) $\frac{\pi k}{4} - (-1)^k\cdot\frac{\pi}{24}$;

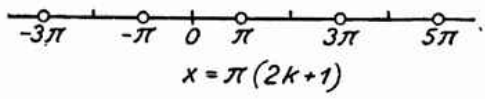
16) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi k}{3}$; 17) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$; 18) $\frac{\pi k}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}$;

19) $\frac{\pi}{10}(2k+1)$; 20) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{6}$.

252. $R\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. **254.** $b\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **256.** 1) $\alpha-\beta=2\pi k$; $\alpha+\beta=\pi(2k+1)$. 2) $\beta\pm\alpha=2\pi k$. 3) $\alpha-\beta=\pi k$. **258.** 1. а) $\approx-0{,}4160$; б) $\approx-0{,}2625$; в) $\approx 0{,}5766$; г) $\approx 0{,}5402$; д) $\approx 1{,}5577$. 2. а) ≈ 1; $\approx 2{,}175$; б) ≈ 1; 0; в) $\approx 0{,}3$; 0; $\approx -2{,}0$. **259.** x — любое действительное число; $y=0$ при значениях x: 1. а) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; б) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; в) πk; г) $2\pi k$; 2. а) πk; б) $\cos(\cos\alpha)\neq 0$; в) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 3. а) 0,2473; 0,8415; 0,5786; $-0{,}1317$; б) $y=\operatorname{tg}2x$, $x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1)$ и $y=\operatorname{tg}x^2$, $x\neq\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}(2k+1)}$. **260.** Функции положительны, если: 1) черт. 48. 4) $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}<x\leqslant 2\pi$;

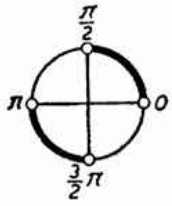


Черт. 48



Черт. 49

5) нет таких значений; 6) $0<x<\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi$; $\pi<x<\frac{5}{4}\pi$; $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$. **261.** 1) а) $\pi(2k+1)$; черт. 49; б) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; в) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; г) $\pi(2k+1)$; д) $\pi k+\frac{\pi}{6}$; е) x—любое действительное число. **262.** 1) $x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $x\neq(2k+1)\pi$; 3) $x\neq\pi k$; в левой части $x\neq\pi(2k+1)$; 5) в левой части $x\neq 2\pi k+\pi$ и $x\neq 2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$. **263.** 1), 2), 3) и 4) — любое действительное число; 5) $x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 6) $x\neq\pi(2k+1)$; 7) $x\neq\frac{\pi k}{2}$; 8) $x\neq 2\pi k$. **264.** 1. а) $x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$; б) $x\neq\pi k$; в) $x\neq\pm\sqrt{\pi k}$; г) $2\pi k\leqslant x\leqslant\pi(2k+1)$; д) x — любое действительное число; е) $x\neq k\pi$; **265.** 1. а) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5}{6}\pi$; б) $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi$; в) $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{6}\pi$. 3. а) черт. 50. **266.** 1. а) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 2. а) $\frac{2}{3}\pi k$; 3. а) $\pi k+\frac{\pi}{4}$. **267.** 1. $0\leqslant 1-\sin x\leqslant 2$; 2. $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$; 8. $-\sqrt{2}\leqslant(\sin x+\cos x)\leqslant\sqrt{2}$. **268.** 1 а) 1 и 3; в) 0 и 2; г) 1 и 6; д) 3 и 5; е) 1, наибольшего нет; м) 1 и 2.



Черт. 50

270. Да. **271.** 1. неограниченные: б) г, д, е, ж, з. 2. ограничены: а, в, з. **273.** 1) нечётные: а, в, г, ж, н, р, т; чётные: б, е, и, к, л, м, о, п, с.

275. 1) а) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$; б) $-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$; в) $(4k+1)\pi<x<(4k+3)\pi$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}$; д) $-\frac{\pi}{2}+k\pi<$ $<x<\pi k$; е) $2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi+2k\pi$; ж) $4\pi k<x<2\pi(2k+1)$. **276.** 1) x — любое действительное число; 2) см. 275. 1 — а; 3) то же; 4) решений нет; 5) и 6) x — любое действительное число; 7) $2\pi k<x<\pi(2k+1)$. **277.** 1. а, б, в, г. 2π; д, е, ж, з, π; 2. а) π; б) 4π; в) 2π; г) π; д) $\frac{\pi}{2}$; е) 6π; ж) π; з) 2π; и, к, л) 2π; 3. а) $\frac{\pi}{2}$; б) 3π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) 2π; е) $\frac{\pi}{4}$; ж) 4π; з) π; и) 2π. **279.** 1) 2) 3) период 2π; 5) период π. **280.** 4) $\approx -6{,}83$; 5) $\approx 0{,}844$. **284.** 1) πk; $\pi k+\operatorname{arc tg}2$; 2) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; $\pi k-\operatorname{arc tg}3$. **285.** -200А.

290. 1) Промежутки возрастания а) $4\pi k-2\pi\leqslant x\leqslant 4\pi k$; б) $\pi k-\frac{\pi}{4}\leqslant$ $\leqslant x\leqslant\pi k+\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{7}{2}\pi+6\pi k\leqslant x\leqslant 6\pi k-\frac{\pi}{2}$; г) $\pi k-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi k$; д) $4\pi k-\pi\leqslant x\leqslant 4\pi k+\pi$. 3) Промежутки убывания: а) $2\pi k-\frac{\pi}{2}\leqslant x<2\pi k$ и $2\pi k<x\leqslant 2\pi k+\frac{\pi}{2}$; б) $2\pi k-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi k$ и $2\pi k+\pi\leqslant x<2\pi k+\frac{3}{2}\pi$; в) $\pi k<x<\pi k+\frac{\pi}{2}$; г) $\pi k+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi(k+1)$; д) $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$; е) $\frac{2}{3}\pi k+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi k+\frac{\pi}{2}$; ж) возрастает в интервалах $(2\pi k-\pi;\ 2\pi k+\pi)$; з) $2\pi k-$ $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2\pi k+\frac{3\pi}{4}$; и) $\pi k+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\pi k+\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}$.

291. 1. $\cos x$ убывает при $0\leqslant x\leqslant\pi$ и $2\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$; $\cos x$ возрастает при $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ и $3\pi\leqslant x\leqslant 4\pi$. **296.** (8,090; $-5{,}878$). **297.** $R\cos\frac{2\pi t}{T}$; $R\sin\frac{2\pi t}{T}$.

300. 1) 0; 2) $\cos\beta$; 3) $-2\sin 2\alpha$; 4) $\sin^2\beta$; 5) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 8) $\sin^2\alpha$; 9) 0; 10) $\sin^2 2\alpha$; 11) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; 12) $-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$; 13) $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; 17) $\cos^3 2\alpha$; 18) 3.

305. $x=\pm\frac{a\operatorname{tg}2\alpha}{2\cos\alpha}$; +, если хорда стягивает дугу, большую $\frac{1}{4}$ окружности. **306.** $\frac{2p\cos^3\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$. **307.** $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

308. $2d\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **309.** $2R^2\sin 3\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

315. 270°. Указание. Обозначить искомую дугу через $6x$ и провести средний радиус.

316. $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}}$. **317.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **319.** $-2h^2\sin 2\alpha$.

325. Отрезок не пересекает плоскость, $\varphi\approx 13°21'$; отрезок пересекает плоскость, $\varphi=90°$. **326.** $\approx 5{,}42$. **327.** $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **328.** $\frac{a}{2}\sin\varphi\cdot\sin 2\alpha$.

329. $\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}$; $\approx 22°37'$. **330.** $\approx 36°52'$.

331. $\arccos(\cos\alpha\cdot\cos\beta)$. **332.** $\cos x=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; $x\approx 6°12'$.

333. $\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$. **334.** $\arcsin\frac{c\sin\alpha}{d}$. **335.** $\frac{ab}{2\cos\alpha}$.

339. По натур. таблицам. 1) $\approx 74°25'$; 2) $\approx 56°1'$; 3) $\approx 164°22'$; 4) $164°36'$.

340. 1) ≈ 104; 2) $\approx 0{,}00109$; 3) $\approx 4{,}710$; 4) $0{,}2248$; 5) $\approx -1{,}191$; 6) 342; 7) $\approx 0{,}6151$; 8) $32{,}16$.

341.

	a	b	c	A	B	S
1) а)	8,49	3,93	9,35	65°10′	24°50′	16,7
б)	0,7321	0,3172	0,7979	66°35′	23°25′	0,1161
в)	2,798	2,334	3,643	50°10′	39°50′	3,265
2) а)	6,37	84,07	84,29	4°20′	85°40′	268
б)	0,1259	0,1738	0,2146	35°55′	54°05′	0,01094
в)	0,6162	0,2954	0,6831	64°23′	25°37′	0,09101
3) а)	528	455	697	49°15′	40°45′	120100
б)	112	15	113	82°22′	7°38′	840
в)	1499	823	1710	61°14′	28°46′	616800
4) а)	261	380	461	34°29′	55°31′	49590
б)	0,0978	0,1001	0,1399	44°20′	45°40′	0,004905
в)	12,01	6,92	13,86	60°03′	29°57′	41,55

342.

	$a=c$	b	$A=C$	B	S	
1)	797,9	634,4	66°35′	46°50′	232200	
2)	8,76	13,96	37°10′	105°40′	36,9	
3)	97,0	115,7	53°23′	73°14′	4504	
4)	26	22	65°	50°	260	$h_a\approx 20$
5)	627	1160	23°30′	133°	144000	
6)	856,7	925,2	57°19′	65°22′	333700	$h_b\approx 721{,}4$

344. 1) ≈ 79 *м*; 2) $\approx 21{,}1$ *м*; 3) $\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$; 6) 19,0 *кГ* и 17,0 *кГ*.

346. 1) а) 1,478; б) 7,86; 2) а) 7,12; б) 3,48; 3) а) 22,3; б) 10,65; 4) а) 9,09; б) 3,60; 5) а) 3,75; б) 4,68; 6) а) 0,358; б) 0,1815; 7) а) 1,85; б) 1,77; в) 1,978; 8) а) 765; б) 2380, в) 742; г) 1780; 9) а) 15,0; б) 66,2; 10) а) $\angle B_1 \approx 40°36'$; $\angle C_1 \approx 115°24'$; $c_1 \approx 1100$; $\angle B_2 \approx 139°24'$; $\angle C_2 \approx 16°36'$; $c_2 \approx 350$; б) $b \approx 720$; $\angle C \approx 78°$; $c \approx 950$; в) $\angle B \approx 114°55'$; $\angle A \approx 34°05'$; $c \approx 31$; г) $S \approx 971$; $\angle A \approx 26°$; $\angle B \approx 47°$; $\angle C \approx 107°$.

		a	b	c	A	B	C	S
347.	1	370,0	545,0	423,4	42°40′	86°30′	50°50′	78180
	2	450,0	84,6	445,1	87°50′	10°50′	81°20′	18820
	3	951	1187	341	40°	126°40′	13°20′	130200
	4	3,670	13,02	10,21	11°46′	133°40′	34°34′	13,56
348.	1	510	317	532	68°30′	35°20′	76°10′	78500
	2	225	800	634	12°14′	131°06′	36°40′	53750
	3	2,296	1,184	1,687	104°54′	29°52′	45°14′	0,9647
	4	62	28	42	124°	21°56′	34°04′	488
349.	1	87	65	77	75°	46°11′	58°49′	2420
	2	614			133°14′	25°16′	21°30′	40520
		55,4	360	309	3°46′	154°44′	29°06′	3660
	3	13,89	7,10	8,42	126°41′	24°13′		23,99
	4	13,81	20,72		25°21′	140°02′		36,11
			6,01	8,14	154°39′	10°44′	14°37′	10,47
	5	240,7	263,1	215,4	59°24′	70°14′		24400
	6	19,06	88,19	—	31°17′	—	50°22′	
							—	—
350.	1	19	34	49	16°26′	30°24′	133°10′	235,6
	2	0,099	0,101	0,158	37°22′	38°16′	104°22′	0,00484
	3	172,5	113,4	120,5	95°	40°54′	44°06′	6806
	4	1,234	2,345	3,457	10°46′	20°50′	148°24′	0,7582

351.

	a	b	c	A	B	C	S
1)	14,55	11,82	5,01	113°17′	48°16′	18°27′	27,24
2)	20,75	55,39	67,95	15°28′	45°23′	119°09′	501,9
3)	52,76	55,52	5,94	59°17′	115°10′	5°33′	141,7
4)	6,735	6,831	0,522	77°10′	98°30′	4°20′	1,738
5)	289,9	198,9	287,8	70°24′	40°16′	69°20′	26980
6)	34	11	29	108°	18°	54°	152,5
7)	17	29	40	22°	39°	119°	213,9
8)	42,5	166,7	138,8	12°05′	124°50′	43°04′	2420
9)	32	25	16	100°24′	50°12′	29°24′	196
10)	10,0	4,8	6,9	115°40′	25°39′	38°41′	15
11)	120,0	29,0	134,4	54°48′	11°23′	113°49′	1590
			100,8	125°12′		43°25′	1190
12)	34	23	15	127°13′	32°04′	20°43′	136

352. 1) ≈ 1560 *га*; 2) $\approx 13{,}8$ *га*; 3) ≈ 1400 *м*². **353.** 3,6 *кГ*; 3,7 *кГ*.

354. $\frac{P}{2\sin\alpha}$; $\frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **355.** $\approx 73°$. **356.** 21 $\frac{м}{сек}$. **357.** $\approx 21°30'$.

358. $\frac{P \cdot a \sin \alpha}{Q \cdot \sin \beta}$ *м*. 359. $\frac{aQ \cdot \sin \beta}{P \cdot \sin \alpha + Q \cdot \sin \beta}$ *см*. 360. $\frac{P}{\sin \alpha}$ (*кГ*); $P \operatorname{ctg} \alpha$ (*кГ*).

361. ≈ 150 *кГм*. 362. ≈ 61 *мм*. 363. $\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{\pi d}$. 364. $\approx 2°23'$.

365. 1) $\approx 2°11'$; 2) $\approx 8{,}7$ шага. 366. $\approx 11°33'$. 367. 2) $\approx 67°55'$.

370. 1) ≈ 3108 *см*^{2}; $\approx 16\,450$ *см*^{3}. 2) $2a^3 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$; $\approx 379\,400$ *см*^{3}.

371. $a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}$.

374. $abc \sqrt{-\cos 2\alpha}$. 375. $\frac{4h^2 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$; $0 < \alpha < 90°$.

378. 1) $\frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$;

2) $\frac{4a^2 \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$; 34 500 *см*^{2}.

382. $4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$; $0 < \alpha < 45°$.

385. $\frac{h^2 \sin 2\alpha}{8 \sin(30° + \alpha) \cdot \sin(30° - \alpha)}$. 386. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$; сечение — треугольник; $\operatorname{tg} \alpha < \frac{2H}{a\sqrt{3}}$, где H — высота призмы.

387. 1) $\sqrt{\frac{1}{2} pqm \sin \alpha}$; 2) $\frac{mn \sin \alpha}{2a}$. 388. 1) $\frac{1}{4} d^3 \sin 2\alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \frac{\beta}{2}$;

2) $\frac{4r^2 h}{\sin \alpha} \cdot \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$. 389. $\frac{H}{\cos \alpha} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

391. $\operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$. 392. $\frac{a^3 \sqrt{2 \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. 394. $\frac{7a^2}{8 \cos \alpha}$.

395. $\frac{3a}{4} \sqrt{2b^2 + a^2}$; $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b\sqrt{2}}{a}\right)$.

397. 2) $\operatorname{arc\,cos}\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$.

398. 1) $\sin x = \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{180°}{n}}$; 2) $\sin x = \operatorname{ctg} \frac{180°}{n} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; 3) $\cos x = \operatorname{ctg} \frac{180°}{n} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

399. $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$; $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$. 400. $\frac{180°}{n}$.

401. $\frac{a^2}{4 \cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha - 30°) \cdot \sin(\alpha + 30°)}$. 402. 1) $\frac{1}{2} b^2 \cos \alpha$.

402. 2) $\frac{a^2}{27} \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 12}$. 403. $\frac{2a^2 \sqrt{3}}{27 \cos \alpha}$.

404. 1) $\frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}$; 2) $\frac{a^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$. 405. $\frac{15h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{16 \sin \alpha}$.

406. 1) $-\frac{a^2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$; 2) $\frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{2}$.

407. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin(\beta\pm\alpha)}{3\sin^2\beta}$; 2) $\frac{h^2\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$.

408. 1) $a^2\cdot\sin^3\alpha$; 2) $\frac{1}{2}a^2\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}$. **409.** $\frac{a^2\sin\alpha}{2}$.

410. $2h^2\cdot\operatorname{tg}2\alpha$. **411.** $\frac{a^2\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\alpha}$.

412. 1) $\frac{a^2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}$; 2) $\frac{2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$

413. $a^2\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$. **414.** $\frac{n}{12}b^3\sin2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$; $\approx 1{,}71\ м^3$.

417. $\frac{na^3\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\alpha}{3\sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{180^\circ}{n}-\alpha\right)}}$. **418.** 1) $\frac{\sqrt{2}\,c^3\sin^2 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{48\sin(45^\circ+\alpha)}$;

2) $\frac{1}{6}c^3\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

422. $\frac{4}{3}m^3\cos\alpha\cdot\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$. **423.** $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}$.

424. $\frac{1}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

427. 48 $см^2$; 96 $см^2$; 144 $см^2$; 288 $см^3$. **428.** а) $84\sqrt{2}\,см^2$; б) $220{,}5\sqrt{2}\,см^2$; в) $252\sqrt{2}\,см^2$; г) $294\sqrt{2}\,см^2$.

431. $\frac{\sqrt{ab}\,(a+b)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **432.** $\frac{l^2\cdot\sin2\alpha\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. **434.** 1) 70°32′; 2) 54°46′.

435. 109°28′. **436.** 1) 138°12′; 2) 116°34′. **437.** $\frac{a^2-b^2}{\cos\alpha}$; $\frac{a^3-b^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

438. $\frac{a^3-b^3}{24}\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}\left(a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-b^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **439.** $\frac{\sqrt{4c^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}-(a-b)^2}}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

440. $\operatorname{arctg}\left(\frac{m-n}{m+n}\cdot\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **441.** $\frac{2H^2}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **442.** $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\cdot\sqrt{-\cos2\alpha}$.

444. $\operatorname{arc\,tg}(\sin15^\circ)\approx 14^\circ31'$. **445.** $\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{-\cos2\alpha}$. **446.** $\sqrt{R^2\cdot\sin^2\alpha+d^2\cos^2\alpha}$.

448. $2dh\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **449.** $\frac{h^3\operatorname{tg}^2\alpha}{4\pi}$; $\frac{h^2\operatorname{tg}\alpha}{4\pi}(2\pi+\operatorname{tg}\alpha)$.

450. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\varphi}\cdot\sqrt{\cos(\varphi+\alpha)\cdot\cos(\varphi-\alpha)}$. **451.** $\frac{a\cdot\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}{4\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$.

452. 70°32′. **453.** $\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$; 19,4 *см*. **454.** $H\cos\frac{\alpha}{2}$. **455.** $360^\circ\sin\frac{\alpha}{2}$; 180°

456. $2 \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right)$. 457. $\approx 82°49'$. 458. $2 \arcsin\left(\frac{\alpha+\beta}{360°}\cdot\sin\frac{180°\cdot\beta}{\alpha+\beta}\right)$.

459. $\frac{c^3\cdot\operatorname{tg}\varphi}{24\pi^2}$; $0{,}25(м^3)$. 460. $\frac{\pi(m^2-n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$. 461. $\frac{(R^2-r^2)\cdot\sin\delta}{2\cos\beta}$.

462. $\frac{\pi h^2}{\cos\alpha}$. 463. $\arccos\frac{m-n}{p}$. 464. $\frac{7}{6}\pi l^3\cdot\sin 2\varphi\cos\varphi$.

465. $\frac{\pi l^3\sin\alpha}{12}\cdot(1+2\sin^2\alpha)$; ≈ 1176; $2\pi l^2\cdot\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 651,3.

466. $\pi R^2\cdot\sin^2\alpha$. 467. $\pi R^2(2+\sin\alpha)$; $\pi R^2(2-\sin\alpha)$.

468. $\frac{\pi h^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$. 469. $218°54'$. 470. $90°$. 471. $4\pi R^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. 472. $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

473. 1) $\approx 36\,750$ км; $\approx 16\,060$ км; 2) $\frac{2r\cdot\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

474. $\frac{4}{3}\pi dR^3\cdot\cos^4\frac{\varphi}{4}\left(3-2\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)$. 476. $\frac{a\sin\alpha}{2\sin(45°+\alpha)}$. 478. $\frac{a\sqrt{6}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{12\cos\frac{\alpha}{2}}$.

479. $\frac{a^3\sin^3\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos^2\beta}{12\sin^3(\alpha+\beta)}$. 480. $\frac{2R^3\cdot\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. 481. $\frac{l^3\sqrt{3}\cos\alpha\sin^2 2\alpha\sin\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}$.

482. $\frac{4}{3}a^3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 483. $\frac{\sqrt{2}a^3\cdot\sin^3\beta\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}$; 16 450 $см^3$.

484. $\frac{a^3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 485. $\frac{a\sqrt{2}\cdot\sin 2\alpha}{4\sin(45°+\alpha)}$. 486. $\frac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$.

487. $\frac{\sqrt{3}R\cdot\sin\alpha}{2\sin(60°+\alpha)}$. 488. $\frac{1}{3}\pi R^3\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; ≈ 307 $м^3$.

489. $\begin{cases} h=(r-r_1)\operatorname{tg}\alpha;\quad h_1=(r-r_2)\operatorname{tg}\beta. \\ \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi}+r_1^3\cdot\operatorname{tg}\alpha+r_2^3\cdot\operatorname{tg}\beta}\ \cdot \end{cases}$ 490. $\pi a^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

491. $\frac{2l\cdot\sin\alpha}{2+\operatorname{tg}\alpha}$. 492. $\frac{10}{81}\pi l^3\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$. 493. $\frac{2\pi H\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

494. $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{180°}{n}}$. 495. $\frac{\pi r^2\cdot\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

496. $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}}$ $\left(\text{или } \cos\frac{x}{2}=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$.

497. $\operatorname{ctg}40°$; $\operatorname{ctg}30°$; $\operatorname{ctg}20°$. 498. $\approx 54°44'$. 499. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\alpha}$.

500. $\frac{r^2}{\cos\varphi}\left[1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$; $\frac{r^3}{3}\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

501. $\sqrt{2}\,b\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. 502. $\frac{1}{3}\pi h^3\cdot\frac{\sin(2\alpha-\beta)\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2(\alpha-\beta)}$. 503. $\frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$.

504. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{m^3\cos^3\varphi}{\pi^3}}\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin 2\alpha$. 505. $\frac{\pi a^2\cdot\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$.

506. $\frac{\pi a^3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}}$; 36 510 $м^3$. 507. $\frac{4\pi b^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}$.

508. $\approx 9{,}47$ $м^3$. 509. $\approx 18°54'$. 510. $\approx 11{,}4$ $л$.

515. $\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 516. $\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}\cdot\sin 2\alpha}$; $\approx 5{,}09$ $м$.

517. $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 518. $2c\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 519. $\arcsin\frac{n-m}{n+m}$.

520. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$; 78°26′; 60°.

521. $\sin x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\approx 52°32'$. 522. $2\arcsin\frac{m-n}{n+m}$. 523. $\approx 70°32'$.

524. $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cdot\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$. 528. $\frac{\sqrt{2}R^3\cdot\sin 2\alpha}{2}$.

529. $\frac{\sqrt{2h^3}}{2\sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 530. $\frac{b}{2\sin\alpha}$.

533. $\frac{8R}{3}\cdot\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$. 536. $\approx 65°33'$.

537. $\frac{2}{3}R^3\cdot\sin^3 2\varphi\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\alpha$. 538. $\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

539. $\frac{abc}{4\sin 2\alpha\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$; $p=\frac{a+b+c}{2}$.

540. $\frac{8\sqrt{3}R^2}{\sin^2\alpha}$. 541. $\approx 62°22'$. 542. $\frac{\pi h\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{45°\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$.

543. 83°24′. 544. $2\pi R\cdot\sin\alpha$.

545. $\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right)$. 546. 1) $\frac{2}{3}\pi R^3\cos^2\alpha\cdot\sin^2 2\alpha$;

2) $4\pi h^2\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. 547. $-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha$. 548. $\pi R^2(1+\cos^2 2\alpha+$

$+2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha)$. 549. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 550. $\frac{\pi H^3}{6}(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)^3$.

551. $\frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{\sin^2 B\cdot\sin^2 C}{\sin^2(B+C)}$; $\pi a^2\frac{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin(B+C)\cdot\cos\frac{1}{2}(B+C)}$. 552. $\frac{2}{3}\pi ab^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$.

553. $2\pi a^2\sqrt{3}\cdot\sin(30^\circ+\alpha)$. **556.** $\frac{\pi}{3}bc(b+c)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. **557.** $\frac{\pi a^3\cdot\operatorname{tg}2\alpha}{6\cos 2\alpha}$.

558. $\frac{\pi a^3\cdot\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 47 080 *см*³; $\frac{4\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$;

8459 *см*². **559.** $\frac{1}{2}\pi d^3\sin 2\alpha$; 57 370 *см*³; $2\sqrt{2}\pi d^2\cdot\cos(45^\circ+\alpha)$; 10 110 *см*².

561. $\frac{16\pi R^2}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **572.** 1) 129°2′; 2) 100.

574. 1) πk; $\pi k\pm\frac{\pi}{4}$. 2) πk; $2\pi k+\pi-\arccos 0{,}412$; 3) $180^\circ k\pm 30^\circ+20^\circ$.

576. $\frac{m(3-m^2)}{2}$. **581.** $a\cos\alpha+b\sin\alpha$. **583.** $a^2\cos\alpha$.

584. $\sqrt{b^2-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **585.** 1) $\frac{\pi d^3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^3\alpha}$; 2) $\frac{\pi a^3}{2}\sin^2 2\alpha$.

586. $\arcsin\frac{6}{\pi m}$ **587.** ≈ 73°44′. **588.** 1) 90°; 2) биссектриса угла α является диаметром круга.

591. ≈ 56°19′; ≈ 33°41′. **592.** 1) 48°1′; 2) 78°42′. **593.** $\frac{2\pi}{3}$;

$\cos x=\frac{pR\pm\sqrt{R^2p^2+8Q^2l^2}}{4Ql}$. **594.** 1) $\frac{1}{2}\pi k+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$; $\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{2}$;

2) $\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$; 3) $\pi k+\operatorname{arc\,tg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$; 7) $\pi k-\frac{\pi}{4}$; $2\pi k-\frac{\pi}{2}$; $2\pi k$; 9) $\pi k-\frac{\pi}{4}$;

$\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 11) πk; $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 12) $2\pi k-1$; πk; 13) πk; $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 14) $\frac{1}{5}\left(\pi k-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\frac{1}{10}\left(\pi k+\frac{\pi}{4}\right)$; 15) $\pi k-\frac{\pi}{2}$. **595.** 1) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{3}\pm\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi k}{4}\pm\frac{\pi}{24}$; 5) $\frac{\pi k}{8}$.

596. 1) $\pi k+\operatorname{arc\,tg}\left(k+\frac{1}{4}\right)$; 9) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 12) $\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{6}$;

15) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

Пётр Валентинович Стратилатов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ 9 и 10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Редактор *В. Г. Долгополов.* Обложка художника *Ю. М. Сигова.*
Художественный редактор *Н. А. Володина.* Технический редактор *Т. В. Карпова*
Корректор *К. А. Иванова.*

Подписано к печати с матриц 17/IX-1964 г. 60×90¹/₁₆.
Печ. л. 7. Уч.-изд. л. 7,22. Тираж 200 тыс. (800 001—1 000 000) экз.

* * *

Издательство «Просвещение» Государственного комитета
Совета Министров РСФСР по печати,
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфкомбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров РСФСР по печати,
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 156

Цена без переплета 9 к., переплет 5 к.